PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI SUPERIORE B

- **Titolare: Nicola Visciglia**
- **Modalita' d'esame: seminario su un argomento concordato con il docente**
- **Materiale bibliografico: Modern Methods in Math. Phys., M. Reed and B. Simon, vol. 1-2-3**
- **Prerequisiti: istituzioni di analisi funzionale**

Il corso sara' incentrato sulla teoria matematica degli operatori autoaggiunti e non-limitati definiti su uno spazio di Hilbert. Questa teoria ha conosciuto uno sviluppo notevole parallelamente alla meccanica quantistica. Una particella quantistica e' infatti rappresentata da un elemento di uno spazio di Hilbert e le osservabili, tra cui l' hamiltoniana, sono degli operatori autoaggiunti (tipicamente non-limitatia) definiti sullo stesso spazio di Hilbert. Ad esempio la posizione di una particella quantistica vincolata a muoversi sulla retta e' rappresentata dall' operatore di moltiplicazione

$$u \to xu$$

che ovviamente non e' un operatore limitato sullo spazio $L^2(\mathbb{R})$. Tuttavia tale operatore e' ben definito e prende valori in $L^2(\mathbb{R})$, se scegliamo come dominio denso il seguente spazio vettoriale

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}) | xu \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Quindi un operatore e' in generale il dato di uno spazio di Hilbert H, di un sottospazio vettoriale $D(A) \subset H$ denso e di un operatore $A : H \supset D(A) \to H$ (il caso in cui $D(A) = H$ ed A e' simmetrico ricade nella teoria degli operatori limitati studiati nel corso di istituzioni di analisi). Noi ci occuperemo dell'analisi, da un punto di vista meramente matematico, di tali operatori. In particolare dopo aver introdotto il concetto di operatore autoaggiunto (limitato o illimitato) faremo dei richiami sulla teoria spettrale per gli operatori limitati e vedremo quali proprieta' vengono ereditate nel caso non-limitato. Daremo dei criteri di autoaggiuntezza, tra cui il teorema di Kato-Rellich ed anche dei criteri di essenziale autoaggiuntezza (il caso cui e' la chiusura dell' operatore A che risulta autoaggiunta) basandoci sulla disuguaglianza di Kato, che ha un suo interesse indipendente.

Successivamente descriveremo il calcolo funzionale, in prima battuta per operatori limitati e per funzioni continue, successivamente per funzioni Boreliane e limitate. Passeremo poi al caso di operatori illimitati e definiremo in generale $f(A)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Boreliana ed $A : H \supset D(A) \to H$. In particolare alla famiglia di funzioni $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ associamo il gruppo di isometrie e^{itA} che rappresentano le traiettorie del sistema dinamico associato all' equazione di Schroedinger

$$i\partial_t u = Au.$$

Con il Teorema di Stone dedurremo una descrizione dinamica dell' autoaggiuntezza, infatti proveremo che un operatore A e' autoaggiunto se e solo se A e' il generatore (ne daremo una definizione) di un gruppo di isometrie dipendenti dal parametro tempo t.

Nella parte finale del corso ci occuperemo, tempo permettendo, della descrizione asintotica per grandi tempi del gruppo e^{itA}, in particolare introdurremo la nozione di operatore d' onda e di completezza asintotica, seguendo l'argomento tracciato da V. Enss.