

# Calcolo Scientifico

Docenti: Leonardo Robol, Stefano Massei

Anno Accademico 2023-24

**Crediti:** 6 CFU.

**Modalità d'esame:** Progetto ed esame orale (su appuntamento).

**Semestre:** I.

**Orario:** Mar 11–13 (N1), Mer 09–11 (N1), Gio 16–18 (M-Lab)

Il corso di Calcolo Scientifico si focalizza su due problemi fondamentali della matematica computazionale:

1. Risolvere sistemi lineari del tipo  $Ax = b$  (con  $A$  di taglia  $n \times n$ ), o problemi ai minimi quadrati del tipo  $\min \|Ax - b\|_2$  (qui  $A$  di taglia  $m \times n$ ).
2. Calcolare lo spettro (o parte dello spettro) di una matrice  $A$ .

Dai corsi di Analisi Numerica e Geometria sono noti metodi per la risoluzione di questi problemi per matrici di dimensioni modeste. Tuttavia, nelle moderne applicazioni ingegneristiche o di analisi dei dati, è d'interesse considerare casi con  $n$  grande (ad es.  $n \geq 10^5$ ). In questo scenario, gli algoritmi "classici" non risultano applicabili, considerando che il solo memorizzare tutte le entrate di  $A$  risulta problematico.

Per affrontare questi problemi, introdurremo i seguenti strumenti:

- I sottospazi di Krylov, che permettono di cercare soluzioni approssimate che vivono in spazi a bassa dimensione. Formuleremo una teoria di convergenza che si basa su risultati di approssimazione polinomiale.
- La decomposizione a valori singolari (SVD), che descrive una generica applicazione lineare come una composizione di trasformazioni ortogonali e scaling diagonale. L'SVD permette di caratterizzare le soluzioni dei problemi ai minimi quadrati, e di calcolare le migliori approssimazioni di rango basso di una matrice.
- L'iterazione dei sottospazi e il metodo delle potenze, per l'approssimazione di autovalori e autovettori di matrici di grandi dimensioni, attraverso la costruzione di una sequenza di sottospazi vettoriali, che converge a sottospazi invarianti della matrice  $A$ .

Durante il corso vedremo (anche in laboratorio) applicazioni di queste tecniche a vari problemi, fra cui:

- Risoluzione di equazioni differenziali discretizzate tramite il metodo delle differenze finite.
- Compressione e classificazione di dati tramite la principal component analysis (PCA).
- Calcolo di misure di centralità e ranking su grafi.