CORSO: **Calcolo delle Variazioni A**
CODICE ESAME: **096AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **42**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
ANNO ACCADEMICO: **2023-24**
SEMESTRE: **secondo**
CORSO DI STUDIO: **laurea magistrale in Matematica (WMA-LM)**

Obiettivi formativi. Il Calcolo delle Variazioni gioca un ruolo importante in molte aree della matematica moderna, per varie ragioni: la prima è che l'esistenza di soluzioni per una vasta classe di equazioni differenziali alle derivate parziali (dette appunto "variazionali") può essere ricondotta all'esistenza di punti di minimo per opprtuni funzionali definiti su spazi di funzioni di dimensione infinita; un'altra ragione è che molte equazioni in fisica e geometria hanno una natura variazionale.

Questo corso è una continuazione del corso di "Elementi di Calcolo delle Variazioni", e ha lo scopo di dare una panoramica di alcuni risultati fondamentale della moderna teoria del calcolo delle variazioni con particolare attenzione ai teoremi di esistenza ottenuti tramite il cosiddetto *metodo diretto*. Nella seconda parte del corso verranno presentati alcuni argomenti di ricerca attuale; alcuni di questi verranno scelti tra quelli elencati sotto sulla base del tempo a disposizione e del background e degli interessi degli studenti presenti.

Programma del corso [versione: 13 agosto 2023].

Le parti non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. RICHIAMO DEI CONCETTI DI BASE
   - Variazione prima di un funzionale ed equazione di Eulero-Lagrange; condizioni al bordo.
   - Esempi di problemi con ostacolo, di problemi vincolati e di problemi con discontinuità libera.
   - Variazione interna e forma di Du Bois-Reymond dell'equazione di Eulero-Lagrange.
   - Equazione delle geodetiche (in una varietà Riemanniana) ed equazione delle superfici minime (di dimensione e codimensione qualunque).

2. IL METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI
   - Esistenza dei minimi via semicontinuità e compattezza.
   - Disuguaglianze di Poincaré generalizzate e condizioni sufficienti per la coercività per funzionali definiti su spazi di Sobolev del primo ordine con e senza condizioni al bordo.
   - Teoremi di semicontinuità rispetto alla topologia debole degli spazi di Sobolev per funzionali integrali con integranda $f(x, u, \nabla u)$ convessa nella variabile ∇u (dimostrazione parziale).
   - Caratterizzazione della semicontinuità debole in termini della convessità della funzione integranda f (rispetto alla variabile ∇u) quando u è scalare.
   - Policonvessità, quasiconvessità e convessità di rango uno per funzioni definite su uno spazio di matrici; la prima proprietà implica la seconda, che implica la terza.
   - Caratterizzazione della semicontinuità debole per funzionali integrali con integranda $f(\nabla u)$ e u vettoriale è in termini di quasiconvessità della funzione integranda f.

3. RILASSAMENTO
   - Definizione di rilassamento di un funzionale. Casi significativi: rilassamento di un funzionale non semicontinuo; rilassamento di un funzionale definito sulle funzioni regolari. Esempio: 2-capacità di un insieme K e rilassamento del funzionale di Dirichlet con u assegnata su K.
   - *Fenomeno di Lavrentiev: definizione ed esempi in dimensione* 1 *e superiore.*
   - *Rilassamento di funzionali con integranda* $f(x, \nabla u)$ *e* u *scalare.*

4. EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE IN FORMA DEBOLE
   - Variazione prima ed equazione di Eulero-Lagrange in forma debole.

- Lemma fondamentale per la regolarità di base delle soluzioni dell'equazione di E-L in alcuni casi modello: le funzioni in $W^{1,2}$ con laplaciano in L^2 che soddisfano opportune condizioni al bordo appartengono a $W^{2,2}$.

5. Gamma-convergenza e teorema di Modica-Mortola
   - Motivazioni; definizione astratta; esempi elementari; proprietà generali.
   - Esempio fondamentale: teorema di Modica-Mortola sulla convergenza dei funzionali di Ginzburg-Landau scalari (o funzionali di Cahn-Hilliard-van der Waals).
   - *Introduzione veloce (senza dimostrazioni) alla teoria delle funzioni BV e agli insiemi di perimetro finito. Dimostrazione del teorema di Modica-Mortola.*

Argomenti opzionali

6. Riordinamento radiale.
   - Riordinamento radiale di insiemi e di funzioni positive.
   - Il riordinamento di u conserva i funzionali con integranda $g(u)$ e decresce quelli con integranda $f(u, |\nabla u|)$ con f convessa nella seconda variabile; il riordinamento di u e v decresce i funzionali con integranda $h(u - v)$ con h convessa e pari.
   - *Applicazioni: costante ottimale nella disuguaglianza di Sobolev, ottimizzazione del primo autovalore del laplaciano con condizioni di Dirichlet al bordo.*

7. Insiemi di perimetro finito.
   - Spazio delle funzioni a variazione limitata in più variabili (BV); teoremi di estensione ed approssimazione, compattezza debole, operatore di traccia. Insiemi di perimetro finito.
   - *Teorema di struttura di De Giorgi per gli insiemi di perimetro finito.*
   - Teoremi di esistenza per problemi di capillarità e per superfici minime in codimensione uno.

8. Misure di Young
   - Misure di Young generate da successioni di mappe a valori in uno spazio metrico compatto: definizione, esistenza e proprietà fondamentali.
   - Dimostrazione alternativa della semicontinuità debole dei funzionali con integranda convessa.
   - Misure di Young generate da gradienti: teorema fondamentale; dimostrazione alternativa della semicontinuità debole dei funzionali con integranda quasiconvessa.

9. Approccio parametrico alle superfici minime in dimensione due.
   - Esistenza di superfici minime di dimensione due via minimizzazione dell'energia di Dirichlet con opportune condizioni al bordo (approccio di Douglas e Radó).
   - *Lemma chiave: esistenza di parametrizzazioni conformi per superfici diffeomorfe al disco (Teorema di Lichtenstein). Dimostrazione parziale del lemma chiave e e traccia della dimostrazione del teorema di Douglas.*

Prerequisiti. È auspicabile che lo studente abbia seguito i seguenti corsi: "Analisi 3", "Istituzioni di Analisi Matematica", "Elementi di Calcolo delle Variazioni". Verranno date per note le nozioni di base sui seguenti argomenti: topologie deboli degli spazi di Banach, teoria degli spazi di Sobolev. Alcuni argomenti di base presentati in Elementi di Calcolo delle Variazioni verranno velocemente richiamati all'inizio del corso.

Testi di riferimento. Il corso non segue un libro di testo specifico. Gli argomenti fondamentali sono tuttavia inclusi nei testi di base, come per esempio:

- B. Dacorogna: *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press, London, 2004.
- B. Dacorogna: *Direct methods in the calculus of variations*, second edition. Applied Mathematical Sciences, 78. Springer Science+Business Media, New York, 2008.
- Jürgen Jost, Xianqing Li-Jost: *Calculus of variations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 64. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- Filip Rindler: *Calculus of variations.* Universitext. Springer International Publishing, 2018.

Modalità d'esame. L'esame consiste di due parti: un seminario su un tema scelto da una lista proposta dal docente (o comunque su un tema concordato con il docente), seguito da un esame orale sugli argomenti fondamentali del corso. La data dell'esame viene concordata individualmente con ogni studente.

Comunicazioni. Per le comunicazioni riguardanti il corso viene utilizzata la piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa (link al team da aggiornare!).