Complex Analysis (Several Complex Variables)

Fabrizio Broglia

Subject. Properties of the algebra of analytic functions and their zero-sets.

Prerequisites. Functions of one complex variable, topology of covering spaces. All these arguments are completely covered by the course of geometry of second year (Geometria 2), but they will be recalled, if necessary.

Program. The study of properties of the ring of analytic functions was historically developped in the complex case because of the "holomorphy property" (derivability in a complex sense) of such functions.

So I will start with the main properties as Cauchy-Riemann conditions, analytic continuation, maximum principle, Hartog's theorem, implicit function theorem, the description of compact open topology and so on and there will be a description of what it implies for the ring of holomorphic functions on an open set in $\mathbb{C}^n$.

We will see initially the local properties of this ring. This means to study the algebraic properties of the ring of convergent power series $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$.

The first results are the Weierstrass Theorems of preparation and division that allow to prove that this ring is an UFD and noetherian, that is, its ideals are finitely generated.

We will prove, in analogy with the polynomial case, a Nullstellensatz characterising the ideal of functions vanishing on the zero set of an ideal I.

The conclusion of this theory will be a description of the zero set of an ideal $I \subset \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ as a ramified covering of an open polycilinder P in $\mathbb{C}^k$, that is, a covering of P outside the zero set of an analytic function.(A ramified covering of this type is generically called analytic covering.)

This notion influenced the complex geometry of the last century, allowing to extend the study of holomorphic functions olso to spaces that are not manifolds. In this way the structure of analytic space was born around the middle of XX century.

This last part, i.e. a global description of analytic spaces, in particular Stein spaces , uses besides the notion of sheaf, some cohomology theory. We will follow the historical development, from ramified coverings (Grauert-Remmert) to the notion of ringed spaces (Cartan, Oka, Bruhat, Whitney, Grothendieck).

Texts. There is a large choice. I will follow mainly the text

R.Gunning, H. Rossi Analytic functions of several complex variables Prentice-Hall 1965

For recalls and developments one can see the text already used for Geometria 2

H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une oú plusieurs variables complexes. Herman Paris 1961

There are also avalaible on my home page some notes written by the student Matteo Telluri.

Final examination. It will be oral. It could be replaced by a seminar of about 40 minuts on a topic close to the course. In this case the subject of the seminar should be concorded with the teacher.

*e.mail address:*fabrizio.broglia@unipi.it

Programma del corso **Analisi Complessa**

tenuto da *Fabrizio Broglia*

Argomento. Proprieta dell'algebra delle funzioni analitiche e dei loro luoghi di zero.

Prerequisiti. Prerequisiti a questo corso sono le nozioni sulle funzioni olomorfe di una variabile, le nozioni di topologia sui rivestimenti. Pur essendo argomenti svolti esaurientemente nel corso di Geometria 2 verranno all'occorrenza richiamati.

Programma. Il corso ha per oggetto lo studio delle proprietà delle funzioni analitiche di più variabili: tale studio si è sviluppato storicamente in ambito complesso per via della proprietà di olomorfia (derivabilità in senso complesso) di tali funzioni.

Pertanto il corso inizia con richiami della teoria delle funzioni olomorfe (Condizioni Cauchy-Riemann, Prolungamento analitico, Principio del massimo, Teorema di Hartogs, Teorema delle funzione implicite etc.) e della topologia compatto-aperta sullo spazio delle funzioni olomorfe.

La parte iniziale sarà dedicata allo studio delle proprietà locali di tale algebra, studio che porterà alla descrizione delle principali proprietà algebriche dell'anello delle serie convergenti $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$: uno dei primi risultati che verrà provato saranno i teoremi di preparazione e divisione di Weierstrass che permettono di provare che tale algebra è un dominio a fattorizzazione unica ad ideali finitamente generati (noetherianità). In tale contesto si proverà anche un Nullstellensatz del tutto analogo a quello di Hilbert per il caso polinomiale, una caratterizzazione cioè per un ideale I dell'ideale degli elementi che si annullano sul suo luogo di zeri $V(I)$.

Lo studio delle proprietà locali si concluderà con la descrizione del luogo di zeri di un ideale (seguendo Ruckert) come rivestimento di un aperto di $\mathbb{C}^n$ al di fuori di un opportuno sottospazio (rivestimento ramificato o più generalmente rivestimento analitico)

Tale nozione ha influenzato moltissimo il contesto geometrico nel secolo scorso permettendo, tra l'altro, di estendere lo studio delle funzioni olomorfe anche su spazi non necessariamente lisci (cioè non necessariamente localmente omeomorfi a aperti di $\mathbb{C}^n$ ma con opportune singolarità) dando vita alla nozione di struttura di spazio analitico.

Il corso potrebbe concludersi con l'esposizione di tale argomento e la descrizione locale degli spazi analitici come rivestimento di aperti di $\mathbb{C}^n$ al di fuori di un opportuno sottospazio. (Nozione di rivestimento ramificato).

Quest'ultima parte, cioè la descrizione globale degli spazi analitici, in particolare degli spazi di Stein, prevede oltre alla nozione di fascio, un poco di teoria di coomologia e verrà fatta seguendo possibilmente lo sviluppo storico di tale nozione, da spazio visto come rivestimento ramificato (Grauert, Remmert) alla nozione di spazio anulato (cioè spazio dotato di un fascio di anelli) (Cartan, Oka, Bruhat, Whitney, Grothendieck).

Testi. Nella enorme produzione scientifica su questi argomenti verrà sguito principalmente il testo di Gunning e Rossi indicato dopo.

Per i richiami e gli ampliamenti della teoria delle funzioni olomorfe si può consultare uno dei numerosi testi sull'argomento: in particolare il testo

H. Cartan Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une oú plusieurs variables complexes. Herman Paris 1961

è già noto agli studenti in quanto riferimento base per il corso di Geometria 2.

Per le altre parti del programma un buon riferimento è il testo

R.Gunning, H. Rossi Analytic functions of several complex variables Prentice-Hall 1965

Sono inoltre disponibili sulla mia home page delle note scritte da Matteo Telluri.

Verifica finale. La verifica finale sarà tramite esame orale, esame che potrà consistere, eventualmente in un seminario di una quarantina di minuti su un argomento relazionato con il corso dopo previo accordo sull'argomento con il docente.

*Indirizzo e-mail del docente:*fabrizio.broglia@unipi.it