Presentazione del corso
Elementi di Analisi Complessa

A.A. 2023/24, secondo semestre

Prof. Marco Abate

Introduzione

L'Analisi Complessa è lo studio delle proprietà geometriche e analitiche delle funzioni olomorfe, in una e più variabili complesse, ed è un campo ricco di risultati eleganti, profondi e inaspettati. Le funzioni olomorfe sono situate in un punto d'equilibrio in cui convivono armonicamente esigenze apparentemente disparate; ed è proprio questa convivenza, e i diversi punti di vista e le diverse tecniche che di conseguenza si possono contemporaneamente mettere in gioco, che rende questa teoria particolarmente affascinante.

Le funzioni olomorfe di una variabile si possono definire in (almeno) tre modi diversi: come funzioni differenziabili in senso complesso; come funzioni analitiche, cioè sviluppabili in serie di potenze; e come soluzioni di un'equazione differenziale, l'equazione di Cauchy-Riemann. Tre condizioni apparentemente diverse che eppure identificano la stessa classe di funzioni — distinguendo nettamente questa teoria da quella delle funzioni differenziabili (o anche delle funzioni analitiche) di variabile reale.

Ci sono altri due fattori che entrano in gioco arricchendo ulteriormente la teoria. Prima di tutto, il campo complesso è algebricamente chiuso: ogni polinomio di grado d ha esattamente d radici, contate con la giusta molteplicità. Questo risultato, come si può immaginare, fornisce una struttura algebrica molto ricca soggiacente la teoria delle funzioni olomorfe. Per esempio, studieremo in dettaglio la struttura degli zeri di una funzione olomorfa, e faremo vedere che ogni sottoinsieme discreto di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è il luogo di zeri di una funzione olomorfa definita su Ω; e potremo anche scegliere arbitrariamente le molteplicità (Teorema di Weierstrass).

Ma forse il secondo fattore è ancora più importante: la topologia del piano è molto più ricca della topologia della retta. Possiamo girare intorno ai punti, e contemporaneamente possiamo estendere funzioni olomorfe lungo curve; questo causa l'esistenza di relazioni molto strette fra l'analisi complessa e la teoria dei rivestimenti, e fra le proprietà analitiche di una funzione olomorfa e le proprietà geometriche del suo dominio. Un risultato che evidenzia in modo particolare quest'ultima relazione è il teorema di Schwarz-Pick: è possibile definire su ogni aperto connesso di $\mathbb{C}$ (che non sia tutto il piano o il piano meno un punto) una distanza completa (detta distanza di Poincaré) che è contratta da *ogni* funzione olomorfa. Di conseguenza, le proprietà geometriche di questa distanza dicono molto sulle proprietà analitiche delle funzioni olomorfe; per esempio, si possono ottenere in questo modo proprietà di compattezza dello spazio delle funzioni olomorfe (Teorema di Montel), oppure si può studiare la dinamica di funzioni olomorfe del disco unitario in sé (Teorema di Wolff-Denjoy). Anche la possibilità di approssimare funzioni olomorfe con polinomi dipende dalla topologia del dominio (Teorema di Runge).

Il corpo principale dell'Analisi Complessa di una variabile è stato sviluppato principalmente nell'Ottocento e nella prima metà del Novecento; alcune aree, quali per esempio la Dinamica Olomorfa, sono invece molto più recenti e sono tutt'ora all'avanguardia della ricerca mondiale in matematica. L'Analisi Complessa di più variabili si è invece principalmente sviluppata nella seconda metà del Novecento ed è sorprendentemente diversa da quella di una variabile.

Definizioni e caratterizzazioni delle funzioni olomorfe di più variabili sono la naturale generalizzazione di definizioni e caratterizzazioni di una variabile: sono contemporaneamente funzioni differenziabili in senso complesso, funzioni analitiche, e soluzioni di un sistema di equazioni differenziali (le equazioni di Cauchy-Riemann). Anche i primi risultati, quali per esempio la formula integrale di Cauchy, la disuguaglianza di Cauchy e il principio del massimo, sono naturali estensioni dei corrispondenti risultati di una variabile. Ma basta addentrarsi un poco nella teoria per rendersi conto che si tratta solo di somiglianze superficiali: la sostanza è profondamente diversa.

In una variabile, è molto facile costruire funzioni olomorfe che siano definite in tutto il piano meno un punto z_0: per esempio, $1/(z - z_0)$. Sorprendentemente, questo in più variabili *non* si può fare: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ (con $n \geq 2$) è un aperto, *ogni* funzione olomorfa definita in $\Omega \setminus \{z_0\}$ si estende olomorficamente a tutto Ω. Di più, vale il fondamentale Teorema di Hartogs: se K è un compatto contenuto dentro un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, allora ogni funzione olomorfa definita in $\Omega \setminus K$ si estende olomorficamente a tutto Ω.

Questo risultato suggerisce una domanda del tutto naturale: quali aperti $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sono il dominio massimale di una funzione olomorfa, cioè esiste una funzione olomorfa definita su Ω che non può essere estesa ad alcun aperto più grande di Ω? Per $n = 1$ si può dimostrare che tutti gli aperti di $\mathbb{C}$ sono dominio massimale di una funzione olomorfa; il teorema di Hartogs ci dice che per $n \geq 2$ questo non è più vero. Lo studio di questo problema ha portato all'identificazione di una classe fondamentale di aperti di $\mathbb{C}^n$, gli aperti pseudoconvessi, che sono dominio massimale di funzioni olomorfe e le cui proprietà analitiche sono profondamente legate alle proprietà geometriche del bordo.

Un altro aspetto che differenzia l'analisi complessa di una variabile da quella di più variabili è di tipo algebrico: la struttura algebrica dell'anello delle serie convergenti in più variabili è sensibilmente più elaborata rispetto a quella dello stesso anello in una variabile. Il motivo, anche stavolta, è di tipo geometrico. I luoghi di zeri di funzioni olomorfe (non identicamente nulle) di una variabile sono un insieme discreto, cioè punti isolati; invece i luoghi di zeri di funzioni olomorfe di n variabili hanno dimensione $n - 1 > 0$, e possono anche avere singolarità di vario genere. Una procedura standard consiste nell'associare a un luogo di zeri S l'ideale di tutte le funzioni olomorfe che si annullano identicamente su S. Le proprietà algebriche di questi ideali saranno tanto più complicate quanto più complicata è la struttura geometrica di S; e di conseguenza l'algebra delle funzioni olomorfe in più variabili è sensibilmente più complicata (e dunque interessante) di quella delle funzioni olomorfe di una variabile.

E questo è solo l'inizio: diverse delle idee che caratterizzano la geometria algebrica e la geometria complessa contemporanea sono nate proprio studiando l'Analisi Complessa di più variabili.

Descrizione breve

Scopo di questo corso è presentare alcuni dei risultati principali dell'Analisi Complessa di una variabile (solo alcuni, ahimé, il tempo a disposizione è limitato...) e dare una prima introduzione all'Analisi Complessa di più variabili. Vedremo sicuramente molti dei risultati sopra descritti e ne approfondiremo altri a seconda dell'interesse degli studenti (e del tempo disponibile).

Informazioni pratiche

I prerequisiti sono i corsi di Analisi Matematica e di Geometria del secondo anno.

Il programma del corso si trova su esami.unipi.it.

I testi di riferimento principali sono:

– Note per un corso di analisi complessa in una variabile, che si trovano a questo link:
http://pagine.dm.unipi.it/abate/matdid/dispense/files/Complex.pdf

– R. Narasimhan: *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser, per la parte di una variabile e

– S.G. Krantz: *Function theory of several complex variables*, Wiley, per la parte di più variabili.

Una lista più ampia di testi si trova sul programma del corso.

Infine, l'esame sarà solo orale e consisterà in un seminario su un argomento collegato al corso scelto in una lista predeterminata (la lista per lo scorso a.a. è qui: http://pagine.dm.unipi.it/abate/novita/novita.php) seguito da alcune domande sul contenuto del corso.