Elementi di Teoria degli Insiemi

2023/2024 – Secondo semestre [1]

Docente: Mauro Di Nasso

Scopo di questo corso è introdurre i primi elementi fondamentali della *teoria degli insiemi*. Questa disciplina riveste un ruolo del tutto speciale. Molti dei suoi aspetti possono essere presentati come si farebbe in un qualsiasi altro corso di matematica, ma la sua particolare importanza sta nel suo cruciale ruolo *fondazionale*. Infatti, al suo interno può essere formalizzata virtualmente tutta la matematica, in accordo col cosiddetto *programma riduzionista* il cui scopo è quello di ridurre ogni nozione matematica al concetto primitivo di insieme. La presentazione e la discussione di questo ruolo fondazionale servirà anche come introduzione ai concetti fondamentali della *logica matematica*.

Nelle prime lezioni del corso ci muoveremo all'interno della cosiddetta teoria *intuitiva* degli insiemi. Assumeremo come "intuitivamente validi" i principi di *estensionalità* e *comprensione*, che risultano coerenti con la consueta pratica matematica, e ne dedurremo alcuni primi risultati sulla *cardinalità numerabile* e la *cardinalità del continuo*. Questa introduzione ci sarà utile per familiarizzare con alcuni concetti importanti, che verranno poi ripresi e sviluppati con maggiore rigore nel seguito. In questa prima parte saranno anche presentati alcuni *paradossi* che storicamente evidenziarono la contraddittorietà di questo modo di procedere. La crisi che ne seguì durante gli anni a cavallo del 1900, portò alla formulazione di *teorie assiomatiche degli insiemi*, il cui ambizioso scopo era quello di rifondare su basi rigorose l'intera matematica.

Dopo questa breve parte introduttiva, tutto il resto del corso sarà proprio dedicato allo sviluppo sistematico di una di quelle teorie, cioè la teoria ZFC di Zermelo-Fraenkel con scelta, che è quella attualmente più usata. Introdurremo anche la teoria delle classi GB di Gödel-Bernays, che risulterà più conveniente per trattare alcune parti del programma, in particolare la ricorsione transfinita. Attenendoci al metodo assiomatico, tutte le nozioni e i risultati presentati verranno giustificati rigorosamente a partire da una iniziale lista di principi, cioè gli assiomi, che saranno gli unici ad essere assunti come validi.

[1] Codice: 053AA; **CFU**: 6; Lunghezza del corso: 60 ore;
Sito web: `https://people.dm.unipi.it/dinasso/eti-24.html`.

Nella parte finale del corso, introdurremo la nozione di *modello della teoria degli insiemi*, e saremo in grado di dare un significato preciso ad affermazioni del tipo: "il Teorema di Hahn-Banach *non è dimostrabile* senza l'assioma di scelta", oppure "l'ipotesi del continuo è *indipendente* dai principi della matematica".

In sintesi, i principali argomenti che saranno sviluppati sono:

- La teoria "intuitiva" degli insiemi
- La teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel con scelta ZFC e la teoria delle classi di Gödel-Bernays GB.
- La teoria dei cardinali e degli ordinali transfiniti.
- Forme equivalenti dell'assioma di scelta.
- Modelli della teoria degli insiemi.

Bibliografia:
Il libro di testo è:
• Hrbacek e Jech, *Introduction to Set Theory.*
Libri di riferimento che può essere utile consultare sono:
• Stoll, *Set Theory and Logic*
• Kunen, *Set Theory*
• Jech, *Set Theory*
• Levy, *Basic Set Theory*
Durante il corso saranno distribuite dispense del docente.

Pre-requisiti:
Nessun particolare pre-requisito. Possono essere utili alcune nozioni generali fornite dal primo anno del corso di studi in Matematica.

Modalità di esame:
La valutazione si articola in 3 parti:
• Soluzione di esercizi assegnati durante il corso.
• Esame scritto.
• Esale finale.
Maggiore sarà il numero di esercizi risolti correttamente dallo studente durante il corso e nella prova di esame su ciascuna delle parti fondamentali del programma, minore sarà la quantità di domande e l'approfondimento della prova orale.