Equazioni ellittiche

Corso della Laurea Magistrale in Matematica (42 ore)
Secondo semestre
Prerequisiti: Spazi di Sobolev
Docente: Bozhidar Velichkov
Esame: Orale classico

Introduzione. Le equazioni ellittiche sono una particolare classe di Equazioni alle Derivate Parziali. Un classico esempio di EDP ellittica è il seguente: dati un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e due funzioni $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$, cerchiamo una funzione

$$u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

tale per cui

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ \quad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega \,, \end{cases} \tag{1}$$

dove Δ è il Laplaciano: $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22} + \cdots + \partial_{dd}$.

Una formulazione "classica" del problema è la seguente:

Date due funzioni continue $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
trovare una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che soddisfa (1).

Questa formulazione, anche se semplice ed intuitiva, ha due limitazioni importanti:

- l'esistenza di una soluzione u in un dominio generale Ω non è garantita;
- in alcuni modelli è naturale considerare funzioni f e g che sono discontinue.

Ci sono due teorie che permettono di generalizzare la nozione classica di soluzione e che offrono solidi teoremi di esistenza per generali Ω, f e g:

la **teoria delle distribuzioni** e la teoria degli **spazi di Sobolev**.

In questo corso ci focalizzeremo sulla nozione di soluzione che proviene dalla teoria degli spazi di Sobolev, ovvero studieremo le **soluzioni deboli** del problema (1) che sono anche i minimi del funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega f(x)u(x)\,dx$$

nella classe di funzioni

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \,, \quad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega \,.$$

Obiettivi. In questo corso studieremo le proprietà delle soluzioni deboli come la loro limitatezza, continuità, differenziabilità, comportamento fino al bordo. In particolare, dimostreremo alcuni teoremi classici, come il **teorema di De Giorgi**, le **stime di Schauder**, il **teorema di Serrin** ed introdurremo strumenti come **blow-up**, **formule di monotonia**, **decadimento dell'eccesso** che sono alla base della teoria moderna di regolarità.

Dispense. Il corso "Calcolo delle Variazioni A" del 2021/22 aveva gli stessi obiettivi formativi e lo stesso programma. Le dispense ed il registro delle lezioni sono disponibili su:

https://people.dm.unipi.it/velichkov/calcolo-delle-variazioni-A-21-22.html