

## Logica Matematica

Lo scopo di questo corso è di fornire una solida conoscenza delle nozioni e dei risultati di base della logica matematica. Ci concentreremo sulla logica del primo ordine, che fu sviluppata, nei primi decenni del ventesimo secolo, allo scopo di formalizzare e studiare il concetto di dimostrazione matematica. Ogni campo della matematica ha i suoi oggetti di studio – spazi topologici, anelli, varietà, misure – questi oggetti si definiscono in maniera precisa, quindi si indagano per mezzo di ragionamenti logici, o dimostrazioni. In questo corso, le dimostrazioni stesse saranno l'oggetto del nostro studio.

Esibiremo una classe di linguaggi formali, detti del primo ordine, abbastanza espressivi per essere presi a fondamento dell'edificio della matematica. Per esempio, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel si esprime in un linguaggio del primo ordine. Mostreremo quindi un sistema finito di regole formali – ossia meccaniche, simili alle regole di calcolo dell'algebra elementare – che permettono di dedurre, in un qualsiasi linguaggio del primo ordine fissato, tutte le possibili conseguenze logiche di un insieme di premesse dato. Questo risultato è il teorema di completezza di Gödel, e può sembrare, ad un primo sguardo, che abbia come diretta conseguenza la possibilità, almeno teorica, di meccanizzare la matematica. Non è proprio così, e, come vedremo, il problema sta nella premesse.

La prospettiva più affascinante che si apre quando poniamo l'oggetto dimostrazione sotto la lente della matematica, è che ci viene offerta la possibilità di indagare ciò che non è dimostrabile né confutabile, di studiare i limiti del ragionamento. Il teorema di completezza, è vero, ci dice che alle regole di deduzione non sfugge nulla di ciò che è implicito nelle premesse. Studieremo però un fenomeno bizzarro: qualunque insieme di premesse non contraddittorie, che sia allo stesso tempo abbastanza potente per esprimere alcuni fatti aritmetici di base, e riconoscibile per mezzo di qualsivoglia procedimento meccanico (per esempio un insieme finito), è necessariamente incompleto. In altri termini, e questo è il primo teorema di incompletezza di Gödel, data una qualunque teoria coerente che si possa usare per meccanizzare almeno un po' di aritmetica, per forza, ci sarà una domanda (del tipo sì/no), che, sebbene espressa nel linguaggio della teoria, non trova risposta fra le sue conseguenze. Dirò di più: data una qualunque teoria come sopra, per esempio la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, è possibile esibire esplicitamente un'equazione diofantea polinomiale che la teoria non sa dire se abbia oppure no soluzione (teorema di Matiyasevich).

Il fenomeno dell'incompletezza è intrigante, ma saremmo giustificati a minimizzarne l'impatto pratico. Non sarà poi un gran guaio se qualcuno ha esibito un'equazione diofantea del millesimo grado che la teoria di Zermelo-Fraenkel non riesce a risolvere, non finché non avremo dominato tutti gradi fino al novetantannovesimo. C'è però un secondo guaio. L'intera idea di meccanizzare la deduzione matematica – il programma di Hilbert – nacque come reazione alle antinomie insiemistiche – il paradosso di Russell, il paradosso di Burali-Forti – nella speranza di edificare la matematica appoggiandosi ad un meccanismo che, essendo esso stesso un oggetto matematico, si potesse dimostrare non contraddittorio. Dimostrare, si intende, se non in termini assoluti, quanto meno sulla base di una qualche teoria così semplice da non destare alcun sospetto, come potrebbe essere

la teoria dell'aritmetica di Peano, o, meglio ancora, un suo sottoinsieme. Ebbene, la speranza sfuma, perché uno degli enunciati indecidibili, quelli di cui una data teoria coerente non può dire se siano veri o falsi, è proprio quello che esprime la coerenza della teoria stessa (qui si potrebbe aprire una lunga parentesi per discutere in quale senso preciso una formula possa esprimere la coerenza di una teoria, ma non ora: ora abbiamo aperto soltanto una corta parentesi, che prontamente chiudiamo). Se una teoria, per fare il nostro solito esempio Zermelo-Fraenkel, non può dimostrare la sua stessa coerenza, automaticamente neanche una teoria più debole, per esempio Peano, potrà dimostrare la coerenza della teoria più forte.

Il sogno di Hilbert è infranto. Ma la nostra storia è dei primi decenni del novecento, in pratica come la radio e il telefono. E quindi? Quindi dobbiamo studiare le dimostrazioni, e vedremo che, per dimostrare i teoremi di incompletezza di Gödel, è utile formalizzare non solo il concetto di dimostrazione, ma il concetto di procedimento meccanico, che chiameremo funzione calcolabile. Per noi, dire cosa sia un procedimento è facilissimo: un procedimento è quello che può svolgere un computer, se programmato opportunamente. Ma immaginiamo di tornare indietro di duecento anni nella storia del pensiero, e vedremo che non è per niente ovvio neppure che i procedimenti possano essere considerati oggetti matematici. Gödel, in pratica, ha scritto, o meglio descritto, il primo compilatore, capace di tradurre una funzione calcolabile data, in una formula aritmetica – non molto diversamente da come un compilatore moderno trasforma, per dire, il linguaggio C in codice macchina. La costruzione e lo studio della classe delle funzioni calcolabili costituirà, quindi, una parte importante del nostro corso, funzionale alla dimostrazione dei teoremi di incompletezza, ma, è chiaro, di interesse indipendente. Per un caso forse fortuito, ma fortunato, il seme di una teoria delle funzioni calcolabili è stato piantato esattamente negli stessi anni in cui venivano sviluppate quelle tecnologie che, convergendo da rami diversi della storia della tecnica, hanno permesso di realizzare il calcolatore universale.

La logica del primo ordine non esaurisce il proprio interesse con l'epopea dei fondamenti. Questo è, anzi, un punto di partenza. I teoremi che dimostreremo nel corso sono l'inizio dello studio delle teorie del primo ordine come oggetti matematici a se stanti. Questo studio prende il nome di teoria dei modelli, e, nelle sue diverse diramazioni, costituisce a tutt'oggi un campo di ricerca assai vivace.

### **Bibliografia**

J. Barwise, *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland 1989.

J. L. Bell & M. Machover, *A course in mathematical logic*, North-Holland 1977.

N.J.Cutland, *Computability, An introduction to recursive function theory*, Cambridge University Press 1980.

### **Modalità d'esame**

Esame orale