

# Metodi numerici per Equazioni Differenziali Ordinarie

Docenti: Leonardo Robol

Anno Accademico 2023-24

**Crediti:** 6 CFU.

**Modalità d'esame:** orale (su appuntamento).

**Semestre:** II.

Il corso di Metodi Numerici per Equazioni Differenziali Ordinarie si occupa di analizzare metodi per la soluzione di problemi di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases},$$

per  $t$  in un opportuno intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

I metodi per risolvere queste equazioni si basano sul trasformare l'equazione differenziale in un problema discreto scegliendo degli istanti di tempo  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ , e calcolando delle approssimazioni  $y_j \approx y(t_j)$  per  $j = 0, \dots, N$ .

Durante il corso dimostreremo che è possibile costruire queste approssimazioni in modo che, sotto opportune ipotesi e al convergere a 0 della distanza  $h_j = t_{j+1} - t_j$  di due istanti temporali successivi, la soluzione discreta converga a quella continua. Supponendo  $h_j = h$ , i metodi più avanzati ci permetteranno di ottenere una convergenza del tipo  $\mathcal{O}(h^p)$  con  $p$  qualche intero positivo.

Ci si accorgerà che per alcune equazioni differenziali (quelle più interessanti!) i risultati di convergenza valgono al limite, ma scegliendo  $h_j$  "piccoli" ma non "infinitesimi" molti metodi non forniscono approssimazioni soddisfacenti. Capire quando usare uno o l'altro metodo è essenziale per poter garantire il calcolo di soluzioni significative. A questo scopo, introdurremo il concetto di regione di stabilità, che collegherà la progettazione di metodi numerici per ODE con la costruzioni di approssimanti razionali dell'esponenziale, e con problemi di analisi complessa.

Il corso coprirà i metodi Runge-Kutta (parte della classe dei metodi ad un passo), e i metodi lineari a più passi. Per costruire metodi in queste classi utilizzeremo anche risultati dalla teoria dei polinomi ortogonali, e studieremo opportuni grafi e alberi per caratterizzarne la convergenza.

Nell'ultima parte del corso, ci occuperemo di progettare metodi che preservino proprietà geometriche del problema differenziale; ad esempio, nel caso di problemi derivanti da un'Hamiltoniana, considereremo metodi symplettici, che garantiscono la conservazione dell'energia anche nella soluzione discreta, così come avviene nella soluzione continua.