

TEORIA DEI NUMERI ELEMENTARE

Anno Accademico 2023/2024

(Primo semestre)

Docente: G.Puglisi

Dopo un'introduzione, ispirata ai capitoli I e II di [1], che richiama le definizioni di base dell'aritmetica negli interi razionali, la prima parte del corso è dedicata alla caratterizzazione dei primi, e successivamente dei numeri naturali, esprimibili come somma di due o più quadrati, con i classici teoremi di Eulero e Lagrange.

Sono contemporaneamente introdotti i simboli di Legendre e Jacobi, e le relative leggi di reciprocità quadratica, e viene affrontato il problema della soluzione di una congruenza di grado maggiore di uno modulo un primo, la potenza di un primo, un qualunque intero m . Con cenni ai metodi di risoluzione esplicita nel caso della congruenza quadratica.

Viene infine dimostrato il teorema di struttura per i gruppi moltiplicativi $\mathbf{Z}/(m\mathbf{Z})$.

La seconda parte del corso è incentrata sullo studio delle principali funzioni aritmetiche, quali ad esempio la funzione di Eulero, di Möbius, dei divisori di Dirichlet, e del loro comportamento asintotico ed in media. Particolare risalto è dato alle proprietà dell'algebra di tutte le funzioni aritmetiche $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{C}$ con le operazioni di somma e prodotto di convoluzione e di quella, isomorfa, delle serie formali di Dirichlet.

L'ultima parte del corso è dedicata al problema della distribuzione dei numeri primi, usando tecniche di analisi elementare applicate alla funzione Λ di von Mangoldt, per arrivare ai teoremi di Tchebychef e Mertens e con applicazione all'ordine normale della funzione di Dirichlet.

Fuori programma verrà presentata una dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi (ottenuta per la prima volta da Selberg nel 1949).

Prerequisiti:

I corsi di analisi matematica 1 e 2, i corsi di aritmetica e di algebra 1.

Testi consigliati:

- [1] G.H. Hardy and E.M. Wright *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press
- [2] K. Chandrasekharan *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag
- [3] L.K. Hua *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag