Ultrafilters and Nonstandard Methods

2023/2024 – First semester [1]

Teacher: Mauro Di Nasso

This course focuses on *Arithmetic Ramsey Theory* and on combinatorial *properties of sets of integers*. The two fundamental tools that will be used are the ones that give the course its title: *ultrafilters* and methods of *nonstandard analysis*. These are two techniques originated from *mathematical logic*: ultrafilters are fundamental objects of infinite combinatorics studied in set theory; while nonstandard analysis was developed within model theory. We will see that those two tools are actually closely related, and can be seen as two sides of the same technique.
We will prove fundamental results in this area of combinatorics, namely *Ramsey's Theorem*, *Hindman's Theorem Van der Waerden's Theorem*, the *Rado's Theorem*, the *Jin's Theorem* and their main consequences. Basic aspects will also be presented of *discrete topological dynamics* on the space nonstandard natural numbers, and its applications in combinatorics of numbers. Finally, some topics at the research frontier will be presented. In fact, the main purpose of this course is to provide technique skills sufficient to address even open problems.

By way of example, we state some of the results that will be proved in this course.

- *Hindman's Theorem.* For every finite coloring of the natural numbers $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ there exists an increasing sequence (a_n) such that the set of its finite sums $\mathrm{FS}(a_n) = \left\{\sum_{i\in F} a_i \mid \emptyset \neq F \subset \mathbb{N} \text{ finito}\right\}$ is monochromatic, *i.e.*, there exists a color C_i with $\mathrm{FS}(a_n) \subseteq C_i$.[2]

- *van der Waerden's Theorem.* In every finite coloring of the natural numbers there exist arbitrarily long monochromatic arithmetic progressions.

[1] Exam Code: 230AA; **CFU**: 6; Course length: 42 hours;
Web site: `https://people.dm.unipi.it/dinasso/ultra-23.html`.

[2] To get an idea of the difficulty of obtaining such a property, you can try to prove the reduced version where only two elements are considered: "For every finite coloring of the natural numbers there exists a monochromatic triple of the type $a, b, a+b$." (This result, known as *Schur's Theorem*, dates back to 1918.)

- *Bergelson-Hindman's Theorem*: In every finite coloring of the natural numbers there exist monochromatic a, b, c, d such that $a + b = c \cdot d$.
- *Jin's Theorem.* Let $A, B \subseteq \mathbb{N}$ be sets of natural numbers with positive upper asymptotic density.[3] Then the sum set

  $$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

  has "bounded gaps" on arbitrarily long intervals, *i.e.* there exists k such that for every N there is an interval I of length N with the property that every subinterval $J \subset I$ of length k contains elements of A.

An example of one of the most important open problems is the following, where the additive and multiplicative structure of the naturals are combined (which is typically very difficult to achieve, as is well known from number theory).

- *Open problem*: Is it true that in every finite coloring of the natural numbers there exists a monochromatic configuration of the type $a, b, a + b, a \cdot b$?

We will prove some partial results that seem to suggest the validity of that conjecture.

Bibliography:

• Mac Cutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory.*
• Hindman-Strauss, *Algebra in the Stone-Cech compactification.*
• Di Nasso-Goldblatt-Lupini, *Nonstandard methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory.*
• Teacher's handouts.

Pre-requisites:
No particular pre-requisites, other than the general basics provided by the first two-year course of study in Mathematics.

Examination arrangements:
• Solution of problems assigned during the course.
• Final seminar on topic agreed upon with the lecturer.
• Final oral examination.

The greater the number of problems correctly solved by the student during the course on each of the fundamental parts of the syllabus, the lower will be the amount of questions and depth of the final oral exam.

[3] The upper asymptotic density $\overline{d}(A)$ of a set $A \subseteq \mathbb{N}$ is defined by setting: $\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A\cap[1,n]}{n}$.

Ultrafiltri e Metodi Nonstandard

2023/2024 – Primo semestre [1]

Docente: Mauro Di Nasso

Questo corso è focalizzato sulla *teoria aritmetica di Ramsey* e sulle *proprietà combinatorie degli insiemi di interi*. I due strumenti fondamentali che verranno utilizzati per dimostrare quei risultati sono quelli che danno il titolo al corso: *ultrafiltri* e metodi dell'*analisi nonstandard*. Si tratta di due tecniche originate dalla *logica matematica*: gli ultrafiltri sono oggetti fondamentali della combinatoria infinita studiata all'interno della teoria degli insiemi; mentre l'analisi nonstandard è stata elaborata all'interno della teoria dei modelli. Vedremo che quei due strumenti sono in realtà strettamente collegati, e possono essere visti come due facce della stessa tecnica.

Nel corso dimostreremo risultati fondamentali in questo ambito della combinatoria, e cioè il *Teorema di Ramsey*, il *Teorema di Hindman*, il *Teorema di van der Waerden*, il *Teorema di Rado*, il *Teorema di Jin*, e loro principali conseguenze. Verranno inoltre presentati gli aspetti di base della *dinamica topologica discreta* sui numeri naturali nonstandard, e le sue applicazioni in combinatoria e teoria di Ramsey. Infine, verranno presentati alcuni argomenti alla frontiera della ricerca. Infatti, lo scopo principale di questo corso è quello di fornire una competenza tecnica sufficiente per poter affrontare anche problemi aperti.

A titolo di esempio, enunciamo alcuni dei risultati che saranno dimostrati nel corso.

- *Teorema di Hindman.* Per ogni colorazione finita dei numeri naturali $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ esiste una sequenza crescente (a_n) tale che l'insieme delle sue somme finite $\mathrm{FS}(a_n) = \left\{\sum_{i \in F} a_i \mid \emptyset \neq F \subset \mathbb{N} \text{ finito}\right\}$ è monocromatico, cioè esiste un colore C_i con $\mathrm{FS}(a_n) \subseteq C_i$.[2]

- *Teorema di van der Waerden.* In ogni colorazione finita dei naturali esistono progressioni aritmetiche monocromatiche arbitrariamente lunghe.

[1] Codice: 230AA; **CFU**: 6; Lunghezza del corso: 42 ore;
Sito web: `https://people.dm.unipi.it/dinasso/ultra-23.html`.

[2] Per avere un'idea della difficoltà di ottenere una simile proprietà, potete provare a dimostrare la versione ridotta dove si considerano solo due elementi. "Per ogni colorazione finita dei numeri naturali esiste una tripla monocromatica del tipo $a, b, a + b$". (Questo risultato, noto come *Teorema di Schur*, risale al 1918).

- *Teorema di Bergelson-Hindman*: In ogni colorazione finita dei naturali esistono a, b, c, d monocromatici tali che $a + b = c \cdot d$.
- *Teorema di Jin.* Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ insiemi di naturali aventi densità asintotica superiore positiva, allora l'insieme delle somme

  $$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

  ha "buchi limitati" su intervalli arbitrariamente grandi, cioè esiste k tale che per ogni N esiste un intervallo I di lunghezza N con la proprietà ogni suo sottointervallo $J \subset I$ di lunghezza k contiene elementi di A.[3]

Un esempio di problema aperto tra i più importanti è il seguente, in cui si combina la struttura additiva e moltiplicativa dei naturali (cosa tipicamente molto difficile da ottenere, come è ben noto dalla teoria dei numeri).

- *Problema aperto*: È vero che in ogni colorazione finita dei naturali esiste una configurazione monocromatica del tipo $a, b, a + b, a \cdot b$?

Nel corso dimostreremo alcuni risultati parziali che sembrano suggerire la validità di quella congettura.

Bibliografia:

• Mac Cutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory.*
• Hindman-Strauss, *Algebra in the Stone-Cech compactification.*
• Di Nasso-Goldblatt-Lupini, *Nonstandard methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory.*
• Dispense del docente.

Pre-requisiti:

Nessun particolare pre-requisito, oltre alle nozioni generali di base fornite dal primo biennio del corso di studi in Matematica.

Modalità di esame:

• Soluzione di esercizi assegnati durante il corso.
• Seminario finale su argomento concordato col docente.
• Esame orale finale.

Maggiore sarà il numero di esercizi risolti correttamente dallo studente durante il corso su ciascuna delle parti fondamentali del programma, minore sarà la quantità di domande e l'approfondimento della prova orale finale.

---

[3] La densità asintotica superiore $\overline{d}(A)$ di un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è definita come:

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{A \cap [1, n]}{n}.$$