DESCRIZIONE DEL CORSO *ANALISI SUPERIORE A*

Il corso di *Analisi Superiore A* si propone di descrivere alcuni argomenti "avanzati" dell'Analisi Matematica, mettendo insieme il necessario rigore dimostrativo e la spiegazione del motivo per cui questi argomenti sono nati, la loro utilità, ed il loro ruolo nella Matematica contemporanea. Non saranno necessari prerequisiti particolari, aver frequentato con attenzione i corsi di Analisi Matematica obbligatori sarà più che sufficiente per iniziare a seguire le lezioni. Si tratta di un corso che può essere seguito da studenti degli ultimi due anni del corso di laurea.

I tre macroargomenti che compongono il corso sono la Teoria delle distribuzioni, lo studio degli spazi BV (e degli insiemi di perimetro finito), ed i problemi di tipo isoperimetrico e di "clustering".

Teoria delle distribuzioni. Il primo argomento che verrà affrontato è quello della teoria delle distribuzioni, strettamente collegata con la trasformata di Fourier: è l'argomento meno moderno dei tre, e di gran lunga il più semplice dal punto di vista tecnico. L'idea di base è osservare come nello studio dei problemi con derivate parziali uno strumento particolarmente utile sia sempre stato la derivazione per parti (o il teorema della divergenza), che permette di "scaricare" le derivate da una funzione all'altra all'interno di un integrale. Si tratta di un'osservazione estremamente elementare e che può sembrare non eccessivamente profonda, eppure è la scintilla da cui si può costruire la teoria della distribuzioni, che sono oggetti infinitamente non regolari (in un qualche senso, arriveremo a dire che sono oggetti che si possono derivare "meno infinito volte").

Gli spazi BV e gli insiemi di perimetro finito. Il secondo argomento, complesso tecnicamente quanto affascinante (giudizio ovviamente personale di chi scrive), è quello delle funzioni BV, ossia le funzioni a variazione limitata (*functions of Bounded Variations*, da qui il nome dello spazio). In questo caso, il punto di partenza è l'osservazione che lo spazio delle misure è l'ambiente naturale in cui immergere lo spazio delle funzioni L^1, e molti risultati validi in tutti gli spazi L^p tranne per $p = 1$ rimangono validi considerando le misure al posto di L^1. Dal momento che in molti problemi è naturale utilizzare lo spazio $W^{1,p}$ delle funzioni L^p che abbiano una derivata debole anch'essa in L^p, si può intuire che uno spazio molto utile in cui immergere $W^{1,1}$ sia quello delle funzioni L^1 con derivata in senso debole che sia non per forza una funzione L^1, ma almeno una misura. Questo è esattamente lo spazio BV, che studieremo ed impareremo a descrivere ed utilizzare. Strettamente collegata con quella dello spazio BV è la nozione di insiemi di perimetro finito. Questa sarà la parte più soprendente del corso: è naturale per chi inizia questo corso avere l'impressione di sapere benissimo cosa sia il perimetro, concetto che ha utilizzato fin dalle scuole elementari e che presumibilmente non gli ha mai riservato particolari difficoltà. Tuttavia, basta un attimo per far crollare tutte le certezze in questo ambito: se su

$\mathbb{R}^2$ consideriamo un cerchio, oppure lo stesso cerchio privato di un diametro, siamo presumibilmente tutti d'accordo (nel senso della misura di Lebesgue, che dopo oltre un secolo ormai ci appare come "naturale") che si tratti dello stesso identico insieme (forse ci hanno insegnato a dire che sono due rappresentanti dello stesso insieme). Eppure, il concetto di "perimetro" delle scuole elementari ci porterebbe a dire che i due oggetti abbiano perimetro diverso; che uno stesso oggetto abbia due perimetri diversi se lo descriviamo in due modi equivalenti non è però ovviamente accettabile... Grazie allo studio delle funzioni BV riusciremo ad esprimere una teoria del perimetro che, una volta capita, ci apparirà come l'unica sensata, e sarà uno strumento di potenza formidabile per risolvere problemi che altrimenti sarebbero impossibili.

Problemi isoperimetrici e di clustering. Nell'ultima parte del corso metteremo a frutto la teoria degli insiemi di perimetro finito per risolvere alcuni problemi che altrimenti non saremmo mai stati in grado di affrontare. Partiremo dai problemi isoperimetrici (in breve, il fatto che tra tutti gli insiemi dello stesso volume in $\mathbb{R}^N$ la palla sia quello che minimizza il perimetro), per arrivare a considerare problemi di tipo clustering. Un problema di tipo "clustering" è quello di minimizzare il perimetro non per un insieme di volume fissato, ma per un gruppetto di insiemi, ciascuno di volume fissato: la differenza con un problema isoperimetrico che abbia un solo insieme è enorme, visto che insiemi diversi possono condividere pezzi di frontiera per "risparmiare" perimetro.