Corso di Istituzioni di Fisica Matematica

Giovanni Federico Gronchi

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Anno Accademico 2023-24

Pisa, 1 Settembre, 2023

- **co-docente:** prof. Giulio Baù
- **inizio lezioni:** semestre I
- **CFU:** 11, **numero ore:** 72
- **esame:** scritto e orale (ci saranno 2 compitini)
- **testi di riferimento:**
  - note del corso
  - altri testi suggeriti per argomenti specifici
- **pagine web:**
  - `http://adams.dm.unipi.it/~gronchi`
  - piattaforma e-learning del Dipartimento

Principi variazionali della Meccanica

- si introducono le equazioni di Lagrange per il moto dei sistemi meccanici col principio di Hamilton (minima azione). Le soluzioni di tali equazioni soddisfano una condizione di stazionarietà di un funzionale
- si introduce il principio di Maupertuis che fa uso di un altro funzionale e di altre variazioni ammissibili. Questo si presta meglio ad essere utilizzato nella forma di Jacobi (collegamento tra dinamica e geodetiche)

Relazione tra i principi variazionali e l'idea del *finalismo*:

Quali sono le traiettorie? Sono quelle che minimizzano un certo funzionale (detto azione lagrangiana)

Principi variazionali della Meccanica

- critiche: l'idea di usare un principio variazionale per scrivere le equazioni del moto era già nota a Lagrange, ma alcuni contemporanei, e.g. Voltaire, erano contrari a queste idee (vedi il suo *'Candide'*). Probabilmente questo è il motivo per cui la *Mecanique Analitique* di Lagrange è fondata sul principio di D'Alembert (vedi corso di Meccanica Razionale)
- vantaggi: i principi variazionali sono usati oggi per altre formulazioni della Meccanica (quantistica, relativistica...)
- non solo minimi: l'idea originaria è che le traiettorie minimizzino l'azione, ma in realtà non sono sempre minimi. Studieremo delle condizioni necessarie e delle altre sufficienti affinché tali traiettorie siano davvero minimi. Questo si collega ad una teoria sviluppata da Legendre e da Jacobi (punti coniugati)

Meccanica hamiltoniana e sistemi integrabili

- vantaggi della Meccanica hamiltoniana: gli aspetti geometrici sono più evidenti: in questo contesto si studiano più facilmente proprietà quali l'integrabilità di sistemi meccanici
- equazione di Hamilton-Jacobi (HJ): Hamilton (1837, Ottica geometrica); Jacobi (1841, teoria delle trasformazioni); collegamento tra Meccanica e Ottica geometrica
- variabili separabili: usando la teoria di HJ si trasforma un sistema di ODE in una PDE, in generale più complicata da trattare, però esistono casi in cui il problema meccanico si risolve con una scelta opportuna delle variabili indipendenti
- sistemi integrabili: teorema di Liouville-Arnold e variabili azione-angolo (I, φ)

Teoria hamiltoniana delle perturbazioni

- teoria delle perturbazioni e scoperta di Nettuno: nel 1846, usando la teoria delle perturbazioni, John Adams e Urbain Le Verrier scoprirono indipendentemente il pianeta Nettuno (senza telescopio!)
- problema fondamentale della dinamica: data

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

  come si fa a spingere la dipendenza dagli angoli φ ad un ordine superiore in ϵ?
- teoria KAM: cenni alla teoria sviluppata da Kolmogorov, Arnold e Moser