

Metodi numerici per catene di Markov

AA 2023/24

Beatrice Meini

Corso LM – 6 CFU

Obiettivo

L'obiettivo del corso è acquisire competenze sulla risoluzione numerica di catene di Markov, finite o infinite. In particolare saremo interessati al calcolo della distribuzione invariante.

Modalità di svolgimento del corso e di esame

Il corso prevede lezioni teoriche e una parte di sperimentazione numerica in Matlab sui metodi numerici introdotti.

L'esame consiste in un seminario su un argomento legato ai contenuti del corso, oppure in un esame orale tradizionale, a discrezione dello studente.

Introduzione al corso

Una catena di Markov è un processo stocastico $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$, a valori in uno spazio numerabile E , tale che, per ogni $j_0, \dots, j_{n+1} \in E$,

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j_{n+1} | X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j_{n+1} | X_n = j_n].$$

Definiamo la matrice $P = (p_{i,j})_{i,j \in E}$, dove

$$p_{i,j} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Sotto opportune ipotesi, esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] = \pi_j$, per ogni $i \in E$. Inoltre, posto $\pi^T = [\pi_0, \pi_1, \dots]$, tale vettore è l'unico che risolve le equazioni

$$\begin{cases} \pi^T P = \pi^T, \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1. \end{cases}$$

Un problema computazionale che verrà affrontato è calcolare numericamente, se esiste, il vettore π , detto vettore invariante di probabilità.

Le applicazioni sono svariate, includono problemi di teoria delle code, traffico di trasmissione di dati, modelli di evoluzione della popolazione, il PageRank di Google, studio di reti, ecc.

Programma del corso

Richiami sulle catene di Markov

Richiameremo la definizione e alcune proprietà delle catene di Markov discrete e omogenee: matrice di transizione, classificazione degli stati, distribuzione stazionaria, ecc.

Matrici non negative

Le proprietà delle matrici reali non negative saranno utilizzate durante tutto il corso. Presenteremo alcune proprietà, tra cui il teorema di Perron-Frobenius. Verranno introdotte le M-matrici, con le loro proprietà teoriche e computazionali.

Metodi numerici per catene di Markov finite

Verranno introdotti metodi numerici diretti e iterativi per il calcolo di π , nel caso in cui lo spazio degli stati E è finito, che sfruttino le proprietà intrinseche di non negatività del problema.

Modelli di teoria delle code

Modelli di teoria delle code sono rappresentati da catene di Markov di tipo M/G/1, G/M/1, Quasi-Birth-Death (QBD), ecc. Lo spazio degli stati E è infinito e la matrice P ha particolari strutture, che vengono sfruttate per il calcolo di π . In particolare il calcolo di π viene ricondotto alla risoluzione di una opportuna equazione matriciale non lineare, mediante la formula di Ramaswami.

Metodi numerici per catene di Markov infinite

Studieremo metodi numerici specifici per la risoluzione dell'equazione matriciale non lineare che interviene in modelli di teoria delle code. In particolare studieremo metodi di iterazione funzionale, metodi di riduzione ciclica, metodi di interpolazione e tecniche di accelerazione.