Metodi Numerici per la Grafica

Paola Boito

AA 2023/24

Obiettivi

Acquisire familiarità con nozioni teoriche e tecniche numeriche per la rappresentazione e manipolazione di curve e superfici.

Organizzazione del corso

Lezioni teoriche e sperimentazione numerica in MATLAB.

Contenuti del corso

Esempi di rappresentazioni matematiche di curve ad uso della progettazione navale si trovano già a partire dal XIII secolo negli arsenali veneziani, ma è nella seconda metà del XX secolo, con l'avvento della computer-assisted graphics, che si fa più pressante l'esigenza di rappresentare curve e superfici in modo semplice, agile e allo stesso tempo numericamente robusto. La maggior parte del corso verte su rappresentazioni parametriche, ma alcune lezioni saranno riservate anche a tecniche di altro tipo, quali i metodi di suddivisione.

Curve di Bézier e polinomi di Bernstein

Le *curve di Bézier* di grado p si rappresentano in forma parametrica come

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{i=0}^{p} B_i^{(p)}(t)\mathbf{P}_i, \qquad t \in [0,1],$$

dove i $B_i^{(p)}(t)$ sono i *polinomi di Bernstein* di grado p, definiti da

$$B_i^{(p)}(t) = \binom{p}{i} t^i (1-t) t^{p-i}, \qquad i = 0, \ldots, p,$$

e i $\mathbf{P}_i$ sono i *punti di controllo*.

Studieremo le proprietà di queste curve e le tecniche per la loro costruzione, a cominciare dall'*algoritmo di de Casteljau*, nonché il legame con la teoria delle matrici totalmente positive.

Splines

Le curve di tipo spline generalizzano le curve di Bézier per mezzo di una parametrizzazione polinomiale a tratti. Introdurremo le B-splines, che costituiscono una base di funzioni a partire dalle quali si costruiscono le curve spline, e studieremo le proprietà di queste ultime.

Curve NURBS

L'acronimo NURBS sta per Non-Uniform Rational B-Splines e si riferisce a classi di curve a parametrizzazione razionale a tratti. Una curva NURBS ha la forma

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{N_i^{(n)}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_i^{(n)}(t) w_i}, \qquad t \in [0,1],$$

dove le funzioni $N_i^{(n)}(t)$ sono opportune B-splines e i pesi $w_0, \ldots, w_n$ forniscono ulteriori gradi di libertà nella definizione della curva.

Superfici prodotto tensore

Una superficie di tipo prodotto tensore si scrive nella forma

$$\mathcal{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_i(u) g_j(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

dove $\{f_i(u)\}_{i=0}^n$, $\{g_j(v)\}_{j=0}^m$ sono funzioni univariate opportunamente scelte.

Le rappresentazioni parametriche di curve viste sopra si estendono immediatamente a rappresentazioni parametriche di superfici prodotto tensore, scegliendo al posto delle $\{f_i(u)\}_{i=0}^n$, $\{g_j(v)\}_{j=0}^m$ i polinomi di Bernstein, le B-splines oppure le funzioni razionali di base NURBS.

Patch triangolari di Bézier

Un approccio alternativo per estendere le curve di Bézier alla rappresentazione di superfici passa dai *polinomi triangolari di Bernstein* e permette di costruire *patch* triangolari da raccordare poi in modo opportuno.

Metodi di suddivisione

L'idea di fondo nei metodi di suddivisione è di partire da una *mesh* che riproduca grossolanamente l'andamento della curva o superficie da rappresentare, e raffinare poi questa *mesh* in iterazioni successive, secondo adeguate *regole di suddivisione*. Questo approccio ha dei vantaggi, rispetto ai metodi parametrici visti in precedenza, che lo hanno reso molto popolare, ad esempio nella realizzazione dei film di animazione. In questa parte del corso daremo un'introduzione all'argomento, vedremo le principali regole di suddivisione (Catmull-Clark, Doo-Sabin, Loop...) e il legame con le curve spline.