

# 074AA Sistemi Dinamici

## Primo semestre 2023-24

### 6 CFU, 48 ore

Docenti: Claudio Bonanno, Roberto Castorrini

## 1 Descrizione sommaria

Una definizione molto generale di *sistema dinamico* è quella di azione di un gruppo (o di un semi-gruppo) su un insieme. Esempi classici di sistema dinamico sono il flusso di un sistema di equazioni differenziali e le iterazioni di una funzione. In questi due casi ad agire sono  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{N}$  (o  $\mathbb{Z}$  se la funzione è invertibile) rispettivamente, e quindi il gruppo che agisce ha una naturale interpretazione come “tempo” e l’azione rappresenta l’evoluzione temporale di una condizione iniziale. Rientrano in questi esempi classici i modelli fisico-matematici costruiti per studiare sistemi meccanici e i più recenti modelli usati per lo studio dell’evoluzione delle popolazioni in cui le osservazioni avvengono a tempi discreti, o i modelli introdotti per lo studio delle proprietà delle serie storiche (o temporali) di origine biomedico, economico, eccetera. La definizione generale data sopra permette però di includere nella categoria di sistema dinamico anche modelli più astratti, come ad esempio l’azione di un gruppo di matrici su se stesso (un esempio di quest’azione corrisponde all’importante esempio dato dal flusso geodetico sulle superfici a curvatura negativa costante).

L’origine della teoria moderna dei sistemi dinamici si può far risalire ai lavori di Poincaré, il quale intuì la necessità di introdurre metodi per lo studio delle proprietà qualitative delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali a causa dell’esiguità di sistemi le cui soluzioni si possono scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari. Risultò necessario quindi introdurre i concetti da studiare per ottenere le informazioni necessarie alla comprensione delle proprietà asintotiche delle soluzioni, e cercare strumenti matematici per studiare queste proprietà. La natura degli strumenti utilizzati è varia, si va dal calcolo differenziale alla topologia, dalla geometria all’algebra, a seconda del sistema dinamico che si studia.

Scopo del corso è fornire un’introduzione ai concetti di base della teoria moderna dei sistemi dinamici, studiando nei dettagli il caso del flusso di un sistema di equazioni differenziali e delle iterazioni di una funzione. In particolare verrà introdotto il concetto di “comportamento caotico” di un sistema.

## 2 Struttura del corso

Il corso consiste di lezioni ed esercitazioni da 2 ore ciascuna per un totale di 48 ore. Il corso sarà diviso in due parti, nella prima studieremo il caso di sistema dinamico “a tempo continuo” che corrisponde al flusso di un sistema di equazioni differenziali, mentre nella seconda parte affronteremo i sistemi dinamici “a tempo discreto” definiti come iterazioni di una funzione.

## 3 Programma di massima

- Sistemi dinamici continui
  - Definizioni di base ed esempi: punti fissi, orbite periodiche. Comportamento asintotico delle orbite.

- Sistemi lineari, soluzioni e forme normali, sottospazi invarianti.
- Definizioni di stabilità; stabilità lineare; funzioni di Lyapunov; funzioni limitanti.
- Insiemi invarianti e varietà stabili e instabili.
- Sistemi piani, orbite periodiche.
- Sistemi dinamici discreti
  - Definizioni di base ed esempi: punti fissi, orbite periodiche. Comportamento asintotico delle orbite.
  - Stabilità: punti fissi e periodici attrattivi e repulsivi.
  - Introduzione ai sistemi caotici: esistenza di infinite orbite periodiche; horseshoe; dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali; entropia topologica.

## 4 Testi di riferimento

- P. Glendinning, “Stability, instability and chaos”, Cambridge University Press.
- G.C. Layek, “An introduction to dynamical systems and chaos”, Springer.

## 5 Esami

L'esame consiste di una prova scritta e di una prova orale.

La prova scritta ha una durata di tre ore e si considera superata con una votazione non inferiore al 16. Non è possibile utilizzare libri, appunti, quaderni, calcolatrice.

La prova orale è obbligatoria, e va sostenuta in uno degli appelli orali della stessa sessione di esami in cui si è superata la prova scritta. Le sessioni sono: invernale (gennaio-febbraio), estiva (giugno-luglio), autunnale (settembre). Il voto di uno scritto rimane valido per l'intera sessione di esami fino ad una successiva consegna di uno scritto o alla prova orale.

Gli appelli straordinari di aprile e novembre consistono della sola prova orale, riservata a chi ha superato lo scritto all'ultimo appello della sessione invernale (per quello di aprile) e all'appello di settembre (per quello di novembre).

Si terranno due prove intermedie, una all'incirca a metà del corso, l'altra alla fine del corso. Le prove intermedie si considerano superate se si ottiene una media delle votazioni non inferiore al 16 e nessuna votazione inferiore al 10. Chi supera le prove intermedie potrà sostenere l'orale ad un appello orale riservato, ad inizio gennaio, o al primo appello orale della sessione invernale.

## 6 Prerequisiti

È utile una buona conoscenza dei contenuti dei corsi del primo biennio della laurea triennale.

## 7 Altre informazioni

Pagina del corso: <https://pagine.dm.unipi.it/bonanno/sistdin-2324.html>

Docenti:

- Claudio Bonanno, <https://pagine.dm.unipi.it/bonanno/>
- Roberto Castorrini, <https://sites.google.com/view/roberto-castorrini>