Spazi di Sobolev

Corso della Laurea Triennale in Matematica (48 ore)

Secondo semestre

Prerequisiti: Analisi 3

Docente: Bozhidar Velichkov

Esame: Orale classico

L'obiettivo del corso è di introdurre gli studenti alla teoria degli spazi di Sobolev su insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$. Saranno discusse le applicazioni ad alcuni problemi variazionali ed alle teorie delle PDE ellittiche e paraboliche.

Gli studenti devono aver già seguito il corso di Analisi 3. In particolare, servirà conoscere:

- le nozioni di insiemi e funzioni misurabili secondo Lebesgue;
- la teoria base degli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$, in particolare, la convergenza forte e la convergenza puntuale di successioni di funzioni in L^p, la nozione di convoluzione, la densità delle funzioni regolari in L^p, le disuguaglianze di Hölder, Young e Minkowski;
- la nozione di integrale di una funzione su una superficie $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Il corso di *Spazi di Sobolev* può essere seguito sia prima che dopo il corso di *Istituzioni di Analisi.*

Gli spazi di Sobolev sono uno strumento fondamentale nel **Calcolo delle Variazioni** e le **Equazioni alle Derivate Parziali**. In particolare, serviranno nei corsi dedicati agli argomenti seguenti:

- **Equazioni ellittiche** – teoria degli operatori in forma di divergenza; teorema di De Giorgi; teoremi di Schauder.
- **Problemi a frontiera libera** – teoria della regolarità per le soluzioni del problema dell'ostacolo, il problema di Bernoulli, i problemi di partizioni ottime.
- **Calcolo delle variazioni** – in particolare, nelle teorie di ottimizzazione di forma.
- **Equazioni iperboliche** – equazione delle onde, equazione di Schrödinger...

Materiale didattico e testi consigliati

Le dispense del corso saranno resi disponibili sul sito

velichkov.it $\rightarrow$ Teaching $\rightarrow$ Spazi di Sobolev".

Altro utile materiale didattico sono i seguenti libri:

- H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.*
- L.C. Evans, R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.*
- L.C. Evans. *Partial Differential Equations.*

Programma:

Capitolo 1. *Gli spazi L^p come spazi di Banach.*

- Operatori lineari continui su uno spazio di Banach.
- Teorema di Hahn-Banach.
- Norma di un operatore lineare continuo.
- Le nozioni di spazio duale e di convergenza debole in uno spazio di Bananch.
- Lo spazio duale di L^p nel caso $p > 1$.
- La nozione di convergenza debole negli spazi L^p nel caso $p > 1$.
- Le successioni limitate (di funzioni in L^p) sono debolmente compatte.
- Le successioni debolmente convergenti (di funzioni in L^p) sono limitate.
- Semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole.

Capitolo 2. *Spazi di Sobolev di funzioni di una variabile.*

- Derivate deboli e definizione degli spazi $W^{1,p}$ su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.
- Gli spazi $W^{1,p}(I)$ come spazi di Banach.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale in $W^{1,p}(I)$.
- Approssimazione con funzioni regolari.
- Somma, prodotto, modulo, inf e sup di funzioni di Sobolev.
- Teoremi di estensione.
- Limitatezza delle funzioni di Sobolev.
- Funzioni di Sobolev su intervalli limitati e serie di Fourier.
- Funzioni di Sobolev su $\mathbb{R}$ e trasformata di Fourier.
- Applicazioni alla risoluzione di problemi ellittici e parabolici su intervalli.

Capitolo 3. *Spazi di Sobolev di funzioni di più variabili.*

- Derivate deboli e definizione degli spazi $W^{1,p}$ su insiemi aperti di $\mathbb{R}^d$.
- Completezza degli spazi $W^{1,p}$.
- Gli spazi $W_0^{1,p}$
- Approssimazione con funzioni regolari.
- Teoremi di estensione.
- Disuguaglianza di Poincaré.
- Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger.
- Teorema di Rellich.
- Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.
- Immersioni di Sobolev nel caso critico $p = d$.
- Lemma di Morrey e immersioni di Sobolev nel caso $p > d$.
- Traccia di una funzione di Sobolev sul bordo di un dominio regolare.
- Teorema di Gagliardo e disuguaglianze integrali di Hardy e Minkowski.
- Formulazione debole di problemi ellittici.
- Operatori compatti su spazi di Hilbert. Teorema spettrale.
- Autovalori e autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet.
- Equazione del calore su domini limitati.

Le dispense ed il registro delle lezioni del 2022/2023 sono disponibili sul sito:

https://people.dm.unipi.it/velichkov/spazi-di-sobolev-22-23.html