PROGRAMMA DEL CORSO:
EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Titolare del corso: Nicola Visciglia

Modalità d'esame: scritto ed orale

Prerequisiti: Analisi 1 e Analisi 2 (preferibilmente anche Analisi 3)

Materiale bibliografico:

- L. Evans, Partial Differential Equations
- Appunti del docente.

Contenuto del corso

Le equazioni alle derivate parziali (EDP) sono equazioni la cui incognita è una funzione dipendente da più variabili, le cui derivate parziali devono soddisfare delle opportune relazioni. Questo tipo di equazioni si incontrano in tutte le scienze: dalla fisica alla biologia, dall' ingegneria all' economia etc.
Noi ci occuperemo di una trattazione rigorosa delle proprietà delle soluzioni di alcuni modelli di EDP, cercando di dare una panoramica generale delle proprietà e tecniche più rilevanti.
Le EDP possono essere raggruppate in varie classi, lineari e nonlineari, ellittiche, paraboliche ed iperboliche. Durante il corso ci occuperemo principalmente delle equazioni lineari, ma in alcuni casi di occuperemo anche di generalizzazioni o applicazioni a problemi nonlineari.

I principali argomenti che tratteremo sono:

- **EDP del prim'ordine lineari e non lineari.** In tale contesto introdurremmo il metodo delle caratteristiche che permette di ridurre l'analisi dell'equazione a derivate parziali allo studio di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.
- **Equazione di Laplace.** Quest'equazione è l'esempio modello di equazione ellittica. Ci occuperermo del problema di Dirichlet mostrando esistenza ed unicità della soluzione in opportuni domini. Presenteremo il nucleo di Poisson nel caso in cui il dominio sia una palla e poi tratteremo domini più generali con il metodo di Perron. Studieremo proprietà qualitative

delle soluzioni: principio della media, principio del massimo forte e debole, teoremi di tipo Liouville con estensioni anche al caso nonlineare. Come applicazione del principio del massimo presenteremo la tecnica del *moving plane* che permette di provare la simmetrie delle soluzioni di problemi ellittici nonlineari sotto opportune ipotesi.

- **Equazione del calore**. Quest'equazione è l'esempio modello di equazione parabolica. Costruiremo il semigruppo del calore associato. Costruiremo la soluzione di Tychonoff, che permette di mostrare la non unicità per il problema di Cauchy associato. Presenteremo una versione parabolica del principio del massimo e ne vedremo alcune applicazioni, tra cui un criterio di unicità per il problema di Cauchy. Usando tecniche di punto fisso proveremo esistenza ed unicità di soluzioni globali nel caso nonlineare, sotto opportune ipotesi sulla crescita della nonlinearità.
- **Equazione delle onde**. Quest'equazione è l'esempio modello di equazione iperbolica. Costruiremo la soluzione fondamentale in dimensione $1, 2, 3$. In particolare in dimension 1 introdurremo la rappresentazione di d'Alembert della soluzione. In dimensione 3 proveremo la formula di Kirchoff e poi tratteremo la dimension 2 con la tecnica di discesa che ci permetterà di ricondurre il caso bidimensionale al caso tridimensionale. Proveremo delle proprità qualitative delle soluzioni, in particolare il decadimento locale dell' energia e la velocità finita di propagazione. Come conseguenza otterremo l'unicità della soluzione del relativo problema di Cauchy.