CORSO: **Istituzioni di Analisi Matematica**
CODICE ESAME: **770AA**
NUMERO DI CREDITI: **11**
NUMERO DI ORE: **72**
DOCENTE: **Bozhidar Velichkov**
ANNO ACCADEMICO: **2025-26**
SEMESTRE: **primo**
CORSO DI STUDIO: **laurea magistrale in Matematica**

Introduzione

Questo corso è un'introduzione alle seguenti teorie:

Analisi Funzionale e **Spazi di Sobolev**.

L'obiettivo del corso è di introdurre le nozioni e gli strumenti di base necessari per comprendere ed affrontare i problemi attuali nelle seguenti aree di ricerca:

- **Equazioni alle Derivate Parziali**:
  - equazioni ellittiche;
  - equazioni paraboliche (teoria dei semigruppi, equazioni del calore);
  - equazioni iperboliche (equazione delle onde, equazione di Schrödinger, equazioni della fluidodinamica).
- **Calcolo delle Variazioni** e **Teoria Geometrica della Misura**, in particolare:
  - la teoria degli insiemi di perimetro finito;
  - la teoria delle correnti.
- **Analisi Armonica**.

I prerequisiti sono i contenuti del corso di Analisi 3, in particolare:

- la misura ed integrale di Lebesgue;
- spazi L^p su aperti di $\mathbb{R}^n$; disuguaglianze di Hölder e Young;
- serie e trasformata di Fourier.

Esame

Scritto e orale

Dispense e sito del corso

Le dispense ed il registro delle lezioni saranno disponibili sul sito del corso:

https://people.dm.unipi.it/velichkov/IAM-25-26.html

Testi di riferimento

H. Brezis: Analisi Funzionale Teoria e Applicazioni;

H. Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations;

Programma

1. Spazi di Banach e di Hilbert.

- Teoremi fondamentali in spazi di Banach:
  - teorema di Hahn-Banach;
  - teorema del grafico chiuso e della mappa aperta;
  - principio di uniforme limitatezza.
- spazio duale di uno spazio di Banach;
- topologie deboli e deboli*:
  - teoremi di compattezza debole e debole*;
  - limitatezza delle successioni debolmente convergenti;
  - semicontinuità della norma;
  - spazi riflessivi;
- esempi: ℓ^p, L^p, C^k.

2. Operatori lineari.

- Operatori compatti; operatori autoaggiunti; teoria di Fredholm;
- teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert.

3. Distribuzioni e spazi di Sobolev.

- Definizione di distribuzione su un aperto di $\mathbb{R}^n$, derivata distribuzionale;
- gli spazi di Sobolev come spazi di Banach: norma, convergenze forte e debole;
- spazi di Sobolev sulla retta reale;
  - teorema fondamentale del calcolo integrale;
  - limitatezza e continuità delle funzioni di Sobolev su intervalli;
  - prodotto di funzioni di Sobolev;
  - composizione con funzioni regolari;
  - serie di Fourier e funzioni di Sobolev su intervalli limitati;
  - trasformata di Fourier e spazi di Sobolev su $\mathbb{R}$;
- definizione di spazi di Sobolev su aperti di $\mathbb{R}^n$;
- densità delle funzioni regolari;
- teoremi di estensione su domini regolari;
- teoremi di traccia su domini regolari;
- teoremi di immersione e di immersione compatta:
  - disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev;
  - teorema di Rellich-Kondrachov (immersione compatta di $W^{1,p}$ in L^q);
  - immersione dello spazio di Sobolev $W^{1,p}$ per $p > n$).

4. Applicazioni alle PDE ed al Calcolo delle Variazioni.

- Disuguaglianze di Poincaré e di Poincaré-Wirtinger;
- esistenza di soluzioni deboli di PDE ellittiche e paraboliche;
- operatore risolvente, autovalori e autofunzioni.