Metodi Numerici per il Calcolo Tensoriale

Docenti: Leonardo Robol, Stefano Massei

Anno Accademico 2025-26

Crediti: 6 CFU.
Modalità d'esame: Seminario (su appuntamento).
Semestre: II.
Orario: TBD

1 Obbiettivo

L'obiettivo del corso è acquisire le competenze necessarie per l'analisi e il calcolo numerico di tensori, che rappresentano la generalizzazione del concetto di matrici in un contesto multidimensionale. Questi oggetti algebrici suscitano un forte interesse applicativo e a loro volta rendono naturale porsi domande, sia di natura teorica che algoritmica, riguardanti la loro rappresentazione. Verranno presentate applicazioni rilevanti dei tensori nell'ambito dell'analisi di dati e della rappresentazione di funzioni multivariate.

Modalità di svolgimento del corso e di esame

Il corso prevede lezioni teoriche e una parte di sperimentazione numerica in Matlab sui metodi numerici introdotti. L'esame consiste in un seminario su un argomento legato ai contenuti del corso, con una parte implementativa.

Contenuti del corso

Il modo più semplice per immaginarsi un tensore è una matrice con più di due indici (dimensioni). Nel caso si abbiano $d \in \mathbb{N}$ indici ed ognuno di essi possa variare nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$, possiamo definire un tensore $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n \times \cdots \times n}$ specificando le sue n^d entrate

$$(\mathcal{T})_{i_1 \ldots i_d} = t_{i_1 \ldots i_d}.$$

Questo concetto ha una diretta applicazione in contesti dove si hanno dati multidimensionali e per valori moderati di n e di d pone delle domande non banali riguardo alla sua gestione dal punto di vista computazionale. Per esempio, la memorizzazione esplicita delle entrate di tensore con $n = 20$ e $d = 10$ richiede circa 75 terabytes, cosa non disponibile sulla maggior parte dei computer attualmente in commercio. Per questo motivo è di cruciale importanza studiare metodi efficienti per rappresentare ed operare con tali oggetti algebrici.

Rango di un tensore

Un modo efficace per comprimere la rappresentazione di una matrice è cercare di approssimarla con una di rango più basso, se possibile. Sfortunatamente, non esiste un modo univoco e naturale per estendere il concetto di rango matriciale al caso di un tensore con dimensione maggiore di 2. Introdurremo diverse possibili generalizzazioni del concetto di rango al contesto tensoriale ed analizzaremo le tecniche di rappresentazione ed approssimazione di tensori. In particolare gli studenti diventeranno familiari con le seguenti rappresentazioni tensoriali: Canonical Polyadic Decomposition (CP), Tucker decomposition e Tensor Train (TT).

Approssimazione di rango basso di un tensore

Una volta che si sceglie una rappresentazione tensoriale, calcolare i parametri della rappresentazione costituisce di per sé un problema computazionale non banale. Verranno descritte procedure efficienti per l'approssimazione di un tensore nei formati CP, Tucker e TT. Inoltre verranno discusse tecniche dedicate alla valutazione di operazioni algebriche o fra tensori che sono già rappresentati in tali formati.

Applicazioni

Verranno illustrate applicazioni in cui l'utilizzo di formati tensoriali con rango basso permette il calcolo di quantità di interesse in contesti di alta dimensionalità. In particolare vedremo applicazioni riguardanti: la risoluzione numerica di equazioni differenziali, il calcolo di integrali di funzioni multivariate, la spettroscopia di fluorescenza.