

Metodi numerici per Equazioni Differenziali Ordinarie

Docente: Cecilia Pagliantini

Anno Accademico 2025-26

Crediti: 6 CFU.

Modalità d'esame: orale (su appuntamento).

Semestre: II.

Il corso di Metodi Numerici per Equazioni Differenziali Ordinarie si occupa di analizzare metodi per la soluzione di problemi di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

per t in un opportuno intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, e $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

I metodi numerici per risolvere queste equazioni si basano sul trasformare l'equazione differenziale in un problema discreto scegliendo degli istanti di tempo $t_0 < t_1 < \dots < t_N$, e calcolando delle approssimazioni $y_j \approx y(t_j)$ per $j = 0, \dots, N$.

Durante il corso dimostreremo che è possibile costruire queste approssimazioni in modo che, sotto opportune ipotesi e al convergere a 0 della distanza $h_j = t_{j+1} - t_j$ di due istanti temporali successivi, la soluzione discreta converga a quella continua. Supponendo $h_j = h$, i metodi più avanzati ci permetteranno di ottenere una convergenza del tipo $\mathcal{O}(h^p)$ con p qualche intero positivo.

Ci si accorgerà che per alcune equazioni differenziali (quelle più interessanti!) i risultati di convergenza valgono al limite, ma scegliendo h_j “piccoli” ma non “infinitesimi” molti metodi non forniscono approssimazioni soddisfacenti. Capire quando usare uno o l'altro metodo è essenziale per poter garantire il calcolo di soluzioni significative. A questo scopo, introdurremo il concetto di regione di stabilità, che collegherà la progettazione di metodi numerici per ODE con la costruzione di approssimanti razionali dell'esponenziale, e con problemi di analisi complessa.

Il corso coprirà i metodi Runge-Kutta (parte della classe dei metodi ad un passo), e i metodi lineari a più passi. Per costruire metodi in queste classi utilizzeremo anche risultati dalla teoria dei polinomi ortogonali, e studieremo opportuni grafi e alberi per caratterizzarne la convergenza.

Nell'ultima parte del corso, ci occuperemo dello studio di metodi che preservano proprietà geometriche del problema differenziale; in particolare, metodi che preservano alcuni invarianti di moto, la simmetria o la reversibilità del flusso continuo e, nel caso di problemi Hamiltoniani, considereremo e analizzeremo metodi symplettici.