

CORSO: **Teoria della Misura**

CODICE ESAME: **219AA**

NUMERO DI CREDITI: **6**

NUMERO DI ORE: **48**

DOCENTE: **Giovanni Alberti**

ANNO ACCADEMICO: **2025-26**

SEMESTRE: **primo**

CORSO DI STUDIO: **laurea triennale in Matematica (MATR-L)**

Obiettivi formativi. La teoria della misura è uno strumento fondamentale in diverse aree della matematica, in particolare nella teoria della Probabilità e in diverse sotto-aree dell'Analisi, per esempio il Calcolo delle Variazioni e la Teoria Geometrica della Misura. Lo scopo di questo corso è fornire le nozioni elementari e avanzate di teoria della misura necessarie ad affrontare i corsi avanzanti nelle suddette aree, al di là delle nozioni minimali introdotte nel corso di "Analisi 3".

Programma del corso [versione: 27 luglio 2025].

Le parti non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. MISURE POSITIVE.

- Definizione di σ -algebra, proprietà elementari; operazioni sulle sigma algebre; σ -algebra generata da una famiglia di insiemi; σ -algebra di Borel.
- Funzioni misurabili; proprietà elementari.
- Misure σ -additive su una σ -algebra, massa di una misura, proprietà e operazioni elementari.
- Definizioni sparse: misure di Borel e di Radon, misure regolari (dall'esterno/interno). Misure regolari dall'esterno sugli aperti, regolari dall'interno sui chiusi, Borel-regolari.
- Nozione di completezza di una σ -algebra rispetto ad una misura; completamento di una σ -algebra ed estensione della misura al completamento.

2. INTEGRAZIONE.

- Integrazione delle funzioni misurabili a valori positivi. Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi) e lemma di Fatou.
- Integrazione di funzioni a valori reali estesi; teorema di convergenza dominata (di Lebesgue).
- Funzioni sommabili a valori reali o vettoriali (in uno spazio di Banach separabile); spazio delle funzioni L^1 a valori reali o vettoriali; completezza di L^1 .
- *Costruzione dell'integrale per funzioni a valori in uno spazio di Banach separabile (integrale di Bochner). Teorema di convergenza dominata.*
- Immagine (push-forward) di una misura; integrazione rispetto alla misura immagine.

3. MISURE ESTERNE

- Definizione di misura esterna μ su un insieme; insiemi μ -misurabili (secondo Caratheodory); teorema di Caratheodory sulla misurabilità dei Boreliani.
- Costruzione di una misura esterna a partire da una classe di insiemi e da una funzione di gauge (costruzione di Caratheodory). Costruzione della misura di Lebesgue.
- Misura di Hausdorff d -dimensionale su uno spazio metrico; proprietà elementari. Dimensione di Hausdorff. *Disuguaglianza isodiametrica; la misura di Hausdorff d -dimensionale su $\mathbb{R}^d$ coincide con la misura di Lebesgue.*

4. LEMMA DI DYNKIN E APPLICAZIONI

- λ -sistemi e lemma di Dynkin. *Classi monotone e teorema delle classi monotone.*
- Applicazioni: una misura finita è univocamente determinata dai valori su una classe di generatori chiusa per intersezione; regolarità delle misure di Borel (finite e localmente finite).

5. MISURE PRODOTTO

- Definizione di misura prodotto; costruzione del prodotto di due misure σ -finite; teorema di Fubini-Tonelli. *Prodotto infinito di misure di probabilità.*

- Teorema di Fubini-Tonelli per il completamento della misura prodotto; la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{m+n}$ è il completamento del prodotto della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^m$ per la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$; teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.
6. TEOREMA DI RADON-NIKODYM
- Nozione di misura singolare rispetto ad un'altra, e di misura assolutamente continua rispetto a un'altra; decomposizione di Hahn.
 - Teorema di Radon-Nikodym.
7. MISURE A VALORI REALI O VETTORIALI
- Convergenza incondizionata e assoluta per serie a valori in uno spazio di Banach; equivalenza delle due nozioni nel caso finito-dimensionale.
 - Misure a valori in $\mathbb{R}$ o in uno spazio normato di dimensione finita. Misura variazione; finitezza della massa; rappresentazione di una misura vettoriale come prodotto della misura variazione per una densità a valori vettoriali (unitari). *Integrazione rispetto ad una misura reale o vettoriale. Lo spazio di Banach delle misure vettoriali.*
8. CONVERGENZA DEBOLE DI MISURE
- Identificazione delle misure di Borel a valori reali su uno spazio compatto X con gli elementi del duale dello spazio delle funzioni continue su X (teorema di Riesz).
 - Convergenza (debole) e compattezza delle misure; proprietà di una successione convergente di misure positive e finite.
 - Estensione dei risultati precedenti alle misure a valori reali o vettoriali e alle misure positive e localmente finite su spazi localmente compatti.
 - Convergenza per famiglie di misure “tese”, proprietà e teorema di compattezza di Prokhorov.
9. COMPLEMENTI
- *Misure invarianti su gruppi (misure di Haar).*
 - *Dualità $L^p - L^q$ e teorema di Riesz.*
 - *Teorema di ricoprimento di Vitali e teorema di Lebesgue.*
 - *Disintegrazione di una misura.*
 - *Insiemi analitici e insiemi universalmente misurabili.*
 - *Confronto tra integrale secondo Riemann e integrale secondo Lebesgue.*

Prerequisiti. È necessaria una chiara comprensione della teoria dell'integrazione secondo Riemann (corso di “Analisi 1”) e delle nozioni di base di algebra lineare (corso di “Geometria 1”) e di topologia generale, in particolare in spazi metrici (corsi di “Geometria 2” e “Analisi 2”). In alcuni punti del corso risultano utili alcune nozioni di teoria degli insiemi e di analisi funzionale, che verranno richiamate dal docente al momento opportuno.

Attenzione! Le nozioni di base di teoria della misura ed integrazione secondo Lebesgue vengono esposte nelle prime lezioni del corso di “Analisi 3” che si svolge in parallelo: si raccomanda fortemente agli studenti che non hanno già tali basi di seguire queste lezioni, a prescindere dall'intenzione di seguire tutto il corso.

Testi di riferimento. Il corso non segue un testo particolare. La maggior parte degli argomenti trattati sono tuttavia coperti da testi standard di teoria della misura, quali per esempio:

- L. Ambrosio, G. Da Prato, A. Mennucci: *Introduction to measure theory and integration*. Lecture Notes of the Scuola Normale Superiore di Pisa. Edizioni della Normale, Pisa, 2011.
- V.I. Bogachev: *Measure theory, volume 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions, revised edition*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2015.
- P.R. Halmos: *Measure Theory*. Van Nostrand Co., New York, 1950.
- E.M. Stein, R. Shakarchi: *Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton Lectures in Analysis 3. Princeton University Press, 2005.

Modalità d'esame. L'esame consiste di una prova orale sugli argomenti nel corso (definizioni, enunciati e dimostrazioni) accompagnata dalla risoluzione di alcuni esercizi teorici, per esempio i dettagli delle dimostrazioni lasciati per esercizio durante il corso.

La data dell'esame viene concordata individualmente con ogni studente. Si chiede tuttavia agli studenti interessati di iscriversi al primo appello a disposizione (quello di gennaio 2026), a prescindere da quando intendono dare l'esame ([link per l'iscrizione agli esami](#)).

Comunicazioni e materiale didattico. Per le comunicazioni riguardanti il corso e gli esami e il materiale didattico viene utilizzata la piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa ([link al team](#)).