

Istituzioni di Probabilità (773AA)

II semestre A.A. 2025–2026

Francesco Grotto, Mario Maurelli

Informazioni generali

- **Docenti:** Francesco Grotto, Mario Maurelli
- **Destinatari:** Laurea Magistrale
- **Prerequisiti:** Il corso di Probabilità non è formalmente un prerequisito, ma la conoscenza dei suoi contenuti è indispensabile.
- **Durata:** 72 ore, 11 crediti
- **Orario:** Secondo semestre – 6 ore settimanali

Materiale didattico

I testi di riferimento sono:

- Olav Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 3a edizione, Springer.
- Daniel Revuz e Marc Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3a edizione, Springer.

Le note del corso saranno distribuite durante il suo svolgimento.

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova scritta e orale. Due prove intermedie durante il corso esenteranno chi le supererà dallo scritto della sessione estiva.

Cenni ai contenuti del corso

Il corso presenta i fondamenti della teoria dei processi stocastici, ovvero famiglie di variabili aleatorie indicizzate da \mathbb{Z} o un intervallo di numeri reali. L'obiettivo principale è introdurre il calcolo stocastico in dimensione finita e le sue implicazioni più importanti. Gli oggetti principali della teoria sono:

- **Processi di Markov:** caratterizzati dalla indipendenza di futuro e passato condizionalmente al presente. Essi sono ubiqui nelle applicazioni. Il corso assume (minima) familiarità con le catene di Markov e si concentra su:
 - *processi di Feller* e il loro rapporto con la teoria dei semigrupp e degli operatori non limitati,
 - *processi di diffusione*, le cui applicazioni vanno dai fondamenti della meccanica statistica alla quantizzazione stocastica e la moderna intelligenza artificiale.
- **Martingale e semimartingale:** ampia generalizzazione della somma di variabili indipendenti per cui valgono fondamentali teoremi limite, e che quindi sono diventate uno strumento essenziale in tutti gli ambiti della teoria della Probabilità (oltre ad avere avuto significative applicazioni in matematica finanziaria).
- **Processi Gaussiani:** ovvero vettori Gaussiani infiniti, che come in dimensione finita sono importanti perché permettono calcoli espliciti.
- **Moto Browniano:** l'esempio fondamentale di processo diffusivo, appartiene a tutte le classi precedenti.

Il corso si articola come segue:

- Introduzione ai processi stocastici, fatti fondamentali su misure su spazi di funzioni e sul condizionamento.
- Il moto Browniano e le proprietà della sua legge e le sue traiettorie.
- Teoria generale dei processi di Markov, semigrupp e loro generatori associati a processi omogenei nel tempo, il problema delle martingale nella caratterizzazione dei processi di diffusione.
- Martingale e loro proprietà: disuguaglianze massimali, teorema di convergenza e regolarità delle traiettorie, teoremi di arresto opzionale.
- Teoria della variazione quadratica e dell'integrazione stocastica secondo Itô per l'analisi delle traiettorie di martingale e semimartingale continue. Le formule di integrazione per parti e di Itô nel calcolo stocastico, come estensione del calcolo classico a funzioni (aleatorie) poco regolari.
- Equazioni differenziali stocastiche, processi di Markov come loro soluzione, legami con la teoria delle equazioni alle derivate parziali paraboliche ed ellittiche, la formula di Feynman-Kac e la convergenza all'equilibrio dell'equazione di Langevin.