Analisi Matematica I
Prova scritta preliminare n. 1

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

9 gennaio 2013

`*AAAA***`

1. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^e - e^n}{n^e}.$$

2. Studiare la successione a_n definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2\,(a_n)^2 - 1 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in [1, +\infty)$. Studiare inoltre la successione quando il primo termine è dato da $a_1 = 1/\sqrt{2}$. Facoltativo: dimostrare che esiste α per cui a_n non ammette limite.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0. Dimostrare che esiste il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(-x) - f(2x)}{x}.$$
Possiamo affermare che se il limite precedente esiste, allora la funzione f è derivabile in 0?

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$2x^2 + 2x - 1 - \operatorname{arctg}(2x) - x\log(1 + 4x^2) = 0.$$

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica I
Prova scritta preliminare n. 1

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

9 gennaio 2013

*BBBB***

1. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - (n!)^e}{n^e}.$$

2. Studiare la successione a_n definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 - 2 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in [2, +\infty)$. Studiare inoltre la successione quando il primo termine è dato da $a_1 = \sqrt{3}$. Facoltativo: dimostrare che esiste α per cui a_n non ammette limite.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0. Dimostrare che esiste il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-2x)}{x}.$$
Possiamo affermare che se il limite precedente esiste, allora la funzione f è derivabile in 0?

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{x^2}{2} + x - 1 - \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{2}\log(1 + x^2) = 0.$$

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica I
Prova scritta preliminare n. 1

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

9 gennaio 2013

*CCCC***

1. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^e}{(n!)^e - e^n}.$$

2. Studiare la successione a_n definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2\,(a_n)^2 - 1 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in [1, +\infty)$. Studiare inoltre la successione quando il primo termine è dato da $a_1 = 1/\sqrt{2}$. Facoltativo: dimostrare che esiste α per cui a_n non ammette limite.

3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0. Dimostrare che esiste il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(-x)}{x}.$$
Possiamo affermare che se il limite precedente esiste, allora la funzione f è derivabile in 0?

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$2x^2 - 2x - 1 + \operatorname{arctg}(2x) + x\log(1 + 4x^2) = 0.$$

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica I
Prova scritta preliminare n. 1

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

9 gennaio 2013

*DDDD***

1. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^e}{e^n - (n!)^e}.$$

2. Studiare la successione a_n definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 - 2 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in [2, +\infty)$. Studiare inoltre la successione quando il primo termine è dato da $a_1 = \sqrt{3}$. Facoltativo: dimostrare che esiste α per cui a_n non ammette limite.

3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0. Dimostrare che esiste il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(-2x) - f(x)}{x}.$$
Possiamo affermare che se il limite precedente esiste, allora la funzione f è derivabile in 0?

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{x^2}{2} - x - 1 + \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2}\log(1 + x^2) = 0.$$

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.