

# Analisi Matematica Uno

## Prova scritta n. 2

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

18 giugno 2013

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n^3 - 3a_n^2, \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Determinare il limite quando  $\alpha = 2$ ;
  - (b) determinare il limite quando  $\alpha = -\frac{1}{5}$ ;
  - (c) determinare il limite quando  $\alpha = \frac{1}{4}$ ;
  - (d) (facoltativo) determinare il limite quando  $\alpha = \frac{8}{9}$ .
2. Si consideri la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x.$$

- (a) al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , determinare il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = \alpha$ ;
  - (b) determinare, se esistono, valori dei numeri reali  $m, q$  per i quali l'equazione  $f(x) = mx + q$  non ha soluzioni;
  - (c) dimostrare che la funzione  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 10]$  è invertibile. Chiamata  $g: [0, 10] \rightarrow [0, 1]$  la funzione inversa, determinare i punti in cui  $g$  è derivabile e risolvere l'equazione  $g'(f(x)) = \frac{1}{9}$  nella variabile  $x$ .
3. Determinare l'insieme di definizione, l'insieme di derivabilità, gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione integrale

$$F(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+t) e^{t^2} dt.$$

4. Stabilire se la seguente serie converge e se converge assolutamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{2} - 1 \right).$$