SOLUZIONI

1)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{(x + o(x))^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos(\sin x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{5}{24}.$$

2) Osserviamo che $\frac{x}{x^2+1}\cos x$ è una funzione dispari, quindi $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{x^2+1}\cos x\,dx = 0$.

Dunque:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{x^2+1}+x^2\right)\cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,dx$$

Integro per parti:

($\sin\pi = \sin(-\pi) = 0$)

$$= \cancel{\left[x^2\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin x\,dx =$$

per parti

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -2x\sin x\,dx =$$

$$= \left[2x\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos x\,dx$$

$$= \left[2\pi\cos\pi + 2\pi\cos(-\pi)\right] - \cancel{\left[2\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}} =$$

$\cos\pi = -1$

$$= -4\pi.$$

3)

$$f(x) = \frac{\sqrt{2} + \sin \lg x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos \lg x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\sqrt{2} + \sin \lg x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cos \lg x - \sin \lg x - \sqrt{2}}{x^2}$$

Posto $g(t) = \cos t - \sin t - \sqrt{2}$

si potrebbe studiare la funzione $g(t)$.

Oppure si può osservare che:

$$g(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - 1\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] \leq 0 \quad \forall t.$$

Dunque $f'(x) \leq 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ è decrescente.

Osserviamo che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(\lg x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\lg x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x = \exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

3 continua

Osservazione una funzione decrescente NON è strettamente decrescente solo se la derivata si annulla su un intervallo di punti.

Ma $f'(x)$ si annulla su una successione di punti (che non contiene alcun intervallo)

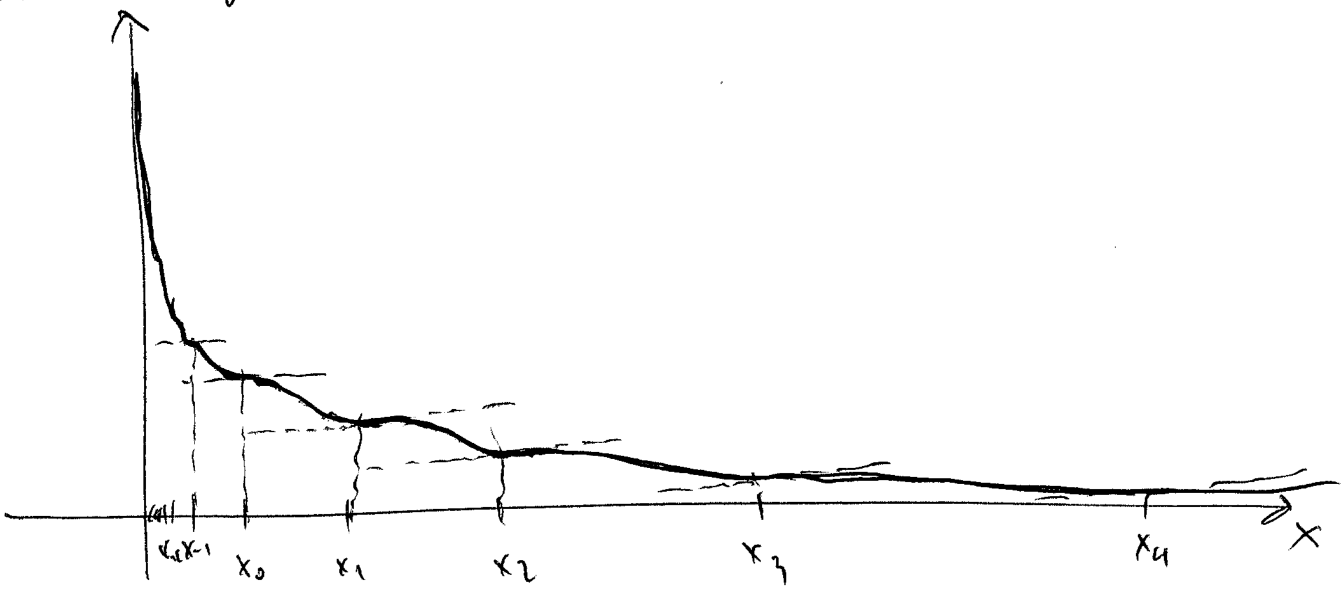
$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente.

I punti $x_k = \exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$
sono punti di massimo per $f'(x)$, dunque sono i punti di flesso con tangente orizzontale

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

Quindi il grafico è qualitativamente il seguente:



4.] Si tratta della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f(k)$$

dove $f(x)$ è la funzione del punto precedente.

Abbiamo osservato che $f(x)$ è decrescente, positiva, infinitesima $\Rightarrow$ la serie (a segni alterni) è convergente.

Per la convergenza assoluta dobbiamo studiare:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Osserviamo che $f(k) = \frac{\sqrt{2} + \sin \log k}{k} \geq \frac{\sqrt{2}-1}{k}$

ma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}-1}{k} = +\infty$ (serie armonica)

e per confronto anche $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}-1}{k} = +\infty$

Dunque la serie data non converge assolutamente