

**Università degli Studi di Firenze**  
**Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica**  
**Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini**  
**APPELLO N. 5 – PROVA SCRITTA (5 Luglio 2016)**

**Importante:** Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Utilizzare il principio di induzione per provare che se  $a \in \mathbb{N}$  è un numero dispari, allora  $a^{2^n} - 1$  è divisibile per  $2^{n+2}$  per ogni  $n \geq 1$ .  
(È utile mostrare preliminarmente che il prodotto di numeri dispari è dispari e che le potenze intere di numeri dispari sono numeri dispari.)

2. Stabilire quale settore circolare di un disco di raggio  $R$  consente di costruire l'imbuto di capacità massima. (Si determini, ad esempio, l'angolo al centro.)

3. Sia  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$  la funzione definita da

$$f(x) = x + x^2 + x^3.$$

- (a) Dimostrare che  $f$  è una funzione invertibile;
- (b) calcolare

$$\int_0^3 f^{-1}(t) dt.$$

4. Stabilire per quali valori (reali) dei parametri  $\alpha$  e (delle coppie)  $(\beta, \gamma)$ , rispettivamente, sono convergenti gli integrali

$$\int_0^\infty \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\cosh t}} dt, \quad \int_0^{1/2} \frac{\arctan(x^\beta)}{(1 - \cos x)^\gamma} dx.$$