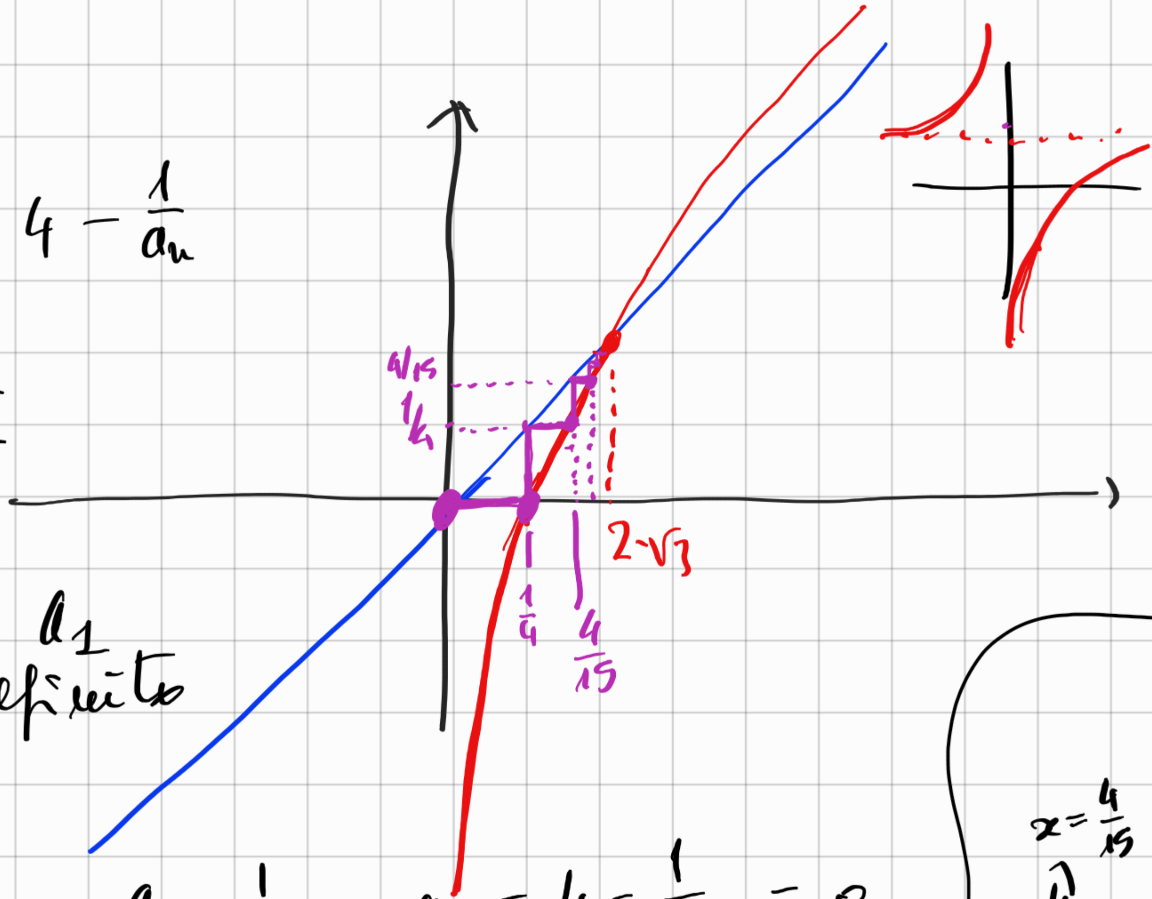
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 32 - 3.12.2021

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

$$y = 4 - \frac{1}{x}$$



$\nexists$

Se $\alpha = 0$ a_1 non è definito

Se $\alpha = \frac{1}{4}$, $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = 4 - \frac{1}{1/4} = 0$,

a_2 non è definito

$f(x) = \frac{1}{4} \iff 4 - \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$x = \frac{4}{15}$

Se $\alpha = \frac{4}{15}$ a_3 non è definito

Trovo una succ. di numeri α_n tali che se $\alpha = \alpha_n$ la succ. a_n non è definita.

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_{n+1} = f^{-1}(\alpha_n) \end{cases}$$

$$f(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$$

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x}$$

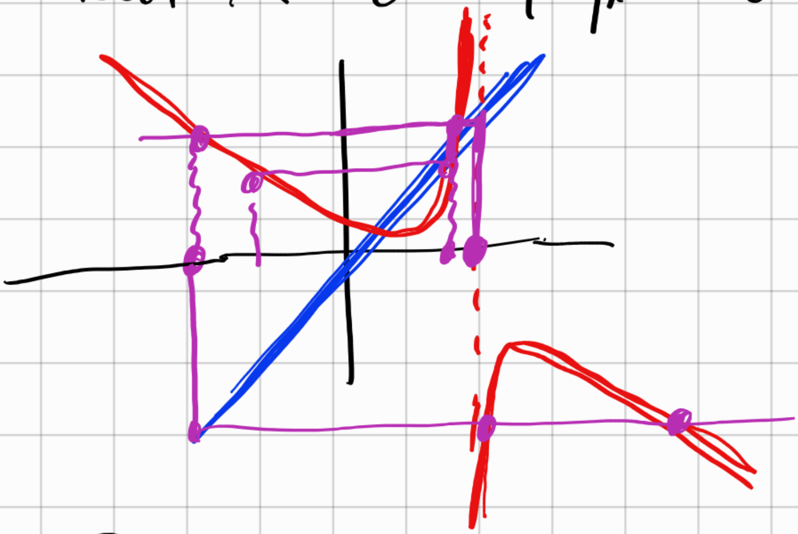
$y = 4 - \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{1}{x} = 4 - y$ $\qquad x = \frac{1}{4-y}$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{4-y}$$

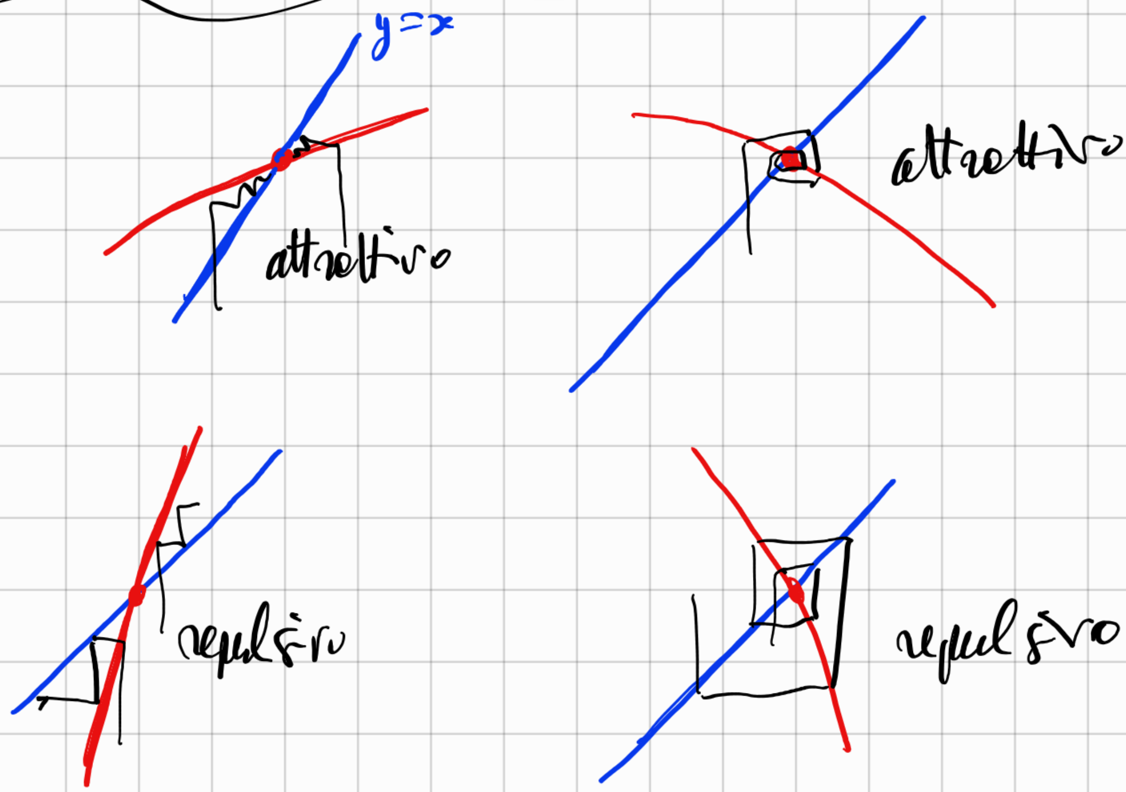
$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{4-\alpha_n} \end{cases}$$

Si trova che α_n è crescente, $\alpha_n \to 2-\sqrt{3}$. $\square$

Attenzione che f potrebbe non essere invertibile



Casistica



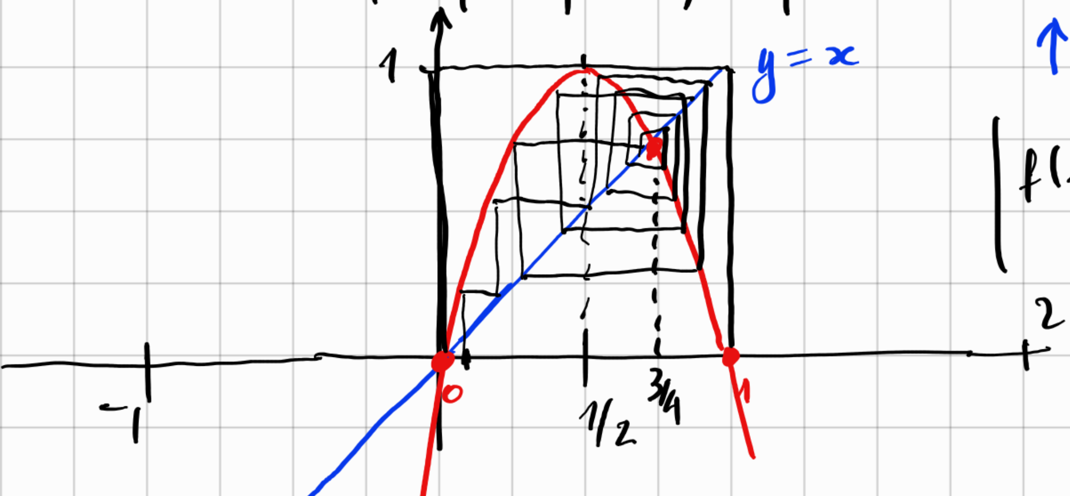
Esercizio

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 4 \cdot a_n \cdot (1-a_n) \end{cases}$$

Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ con

$\alpha = -1$, $\alpha = 2$, $\alpha = \frac{1}{42}$.

$a_{n+1} = f(a_n)$, $f(x) = 4x(1-x)$



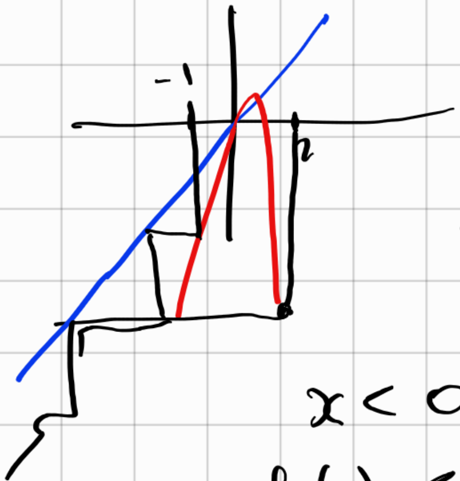
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$

$[0,1]$ è invariante

punti fissi $f(x) = x$

$x = 4x(1-x)$ $\qquad x = 4x - 4x^2$

$4x^2 = 3x$ $\qquad x_1 = 0$ $\qquad x_2 = \frac{3}{4}$



$\alpha = -1$

$I = (-\infty, 0)$ $\qquad \alpha \in I$

$x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Leftarrow$ fra $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ f è strett. crescente

$x<0 \Rightarrow f(x)<0$

$x \in I \Rightarrow f(x) \in I$ $\qquad f(I) \subseteq I$.

I è invariante.

$\Downarrow$

$\alpha \in I \Rightarrow a_n \in I \;\forall n$.

$f(x) < x$ se $x<0$

$a_{n+1} = f(a_n) < a_n \Rightarrow a_n$ st decrescente.

$a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell$ pto fisso $\{0, \frac{3}{4}\}$

non è possibile

$\ell \le a_0 = \alpha < 0$

per esclusione $\ell = -\infty$.

$a_n \to -\infty$. Lo stesso vale per ogni $\alpha < 0$.

$\alpha = 2$ $\qquad a_0 = \alpha = 2$ $\qquad a_1 = 4 \cdot a_0 (1 - a_0)$

$$= 4 \cdot 2 (1-2) = -8 < 0$$

$a_1 < 0 \Rightarrow$ mi riconduco al caso precedente

$a_n \to -\infty$. Lo stesso succede per ogni $\alpha > 1$.

$a_{n+1} = 4 \cdot a_n (1 - a_n)$

$f(x) = 4x(1-x)$

Ci sono dei punti "buoni" per cui la successione partendo da quei punti va a finire <u>esattamente</u> in 0 o in $\frac{3}{4}$.

(*) $\frac{1}{42}$ è uno di questi punti?

$y = 4x(1-x)$ inverto:

$4x^2 - 4x + y = 0$ $\qquad x_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16y}}{8}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{2}$ ....

<u>CURVA LOGISTICA</u>

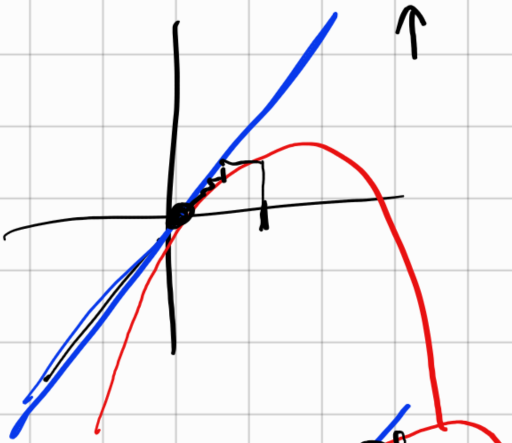
$a_{n+1} = c \cdot a_n$ $\qquad a_n =$ frazione di infetti

crescita esponenziale

logistica: $\qquad a_{n+1} = c \cdot \underbrace{a_n}_{\text{infetti}} \cdot \underbrace{(1-a_n)}_{\text{suscettibili}}$

$\underline{c=1}$

$\uparrow$

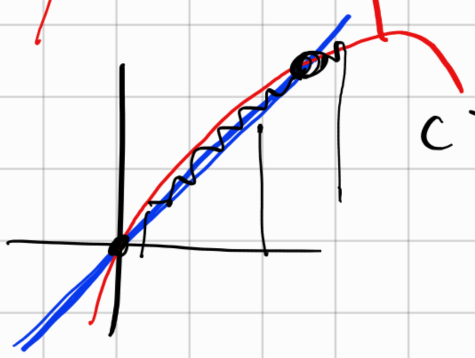


$a_{n+1} = a_n(1-a_n)$

$x = x(1-x)$

$x_1 = 0 \qquad 1 = 1-x$

$x_2 = 0$



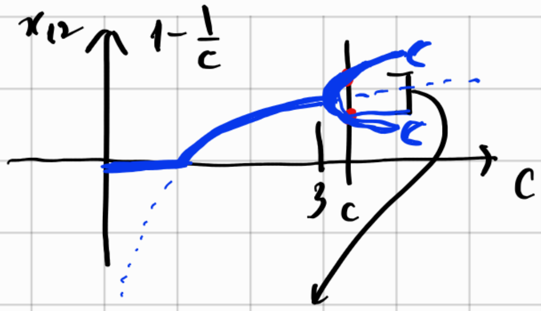
$c > 1$

$\cancel{x} = c\cancel{x}(1-x)$

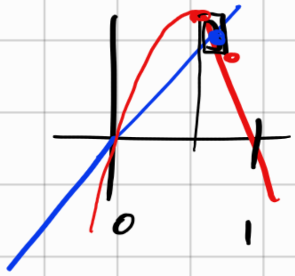
$x = 0$

$1 = c(1-x)$

$1-x = \frac{1}{c} \qquad x = 1 - \frac{1}{c}$



punti fissi di fof



$f(x)=x$

f pol. di II grado

$$f(f(x))=x$$

$\Updownarrow$ polinomio di IV grado.

$f(f(x))-x$ è divisibile per $x\left(x-\frac{3}{4}\right)$ per Ruffini in quanto $x=0$ e $x=\frac{3}{4}$ sono soluzioni.

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

$f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

$f(x)=x$

$c\cancel{x}(1-x)=\cancel{x}\,1$

$x_1=0$

$c(1-x)=1$

$1-x=\frac{1}{c}$

$x=1-\frac{1}{c}$

$$\begin{cases} f(x_1)=x_2 \\ f(x_2)=x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(f(x_1))=x_1 \\ f(f(x_2))=x_2 \end{cases}$$

x_1, x_2 risolvono $\boxed{f(f(x))=x}$

sono punti fissi di fof.

(anche 0, $1-\frac{1}{c}$ $\quad x\left(x-1+\frac{1}{c}\right)$)