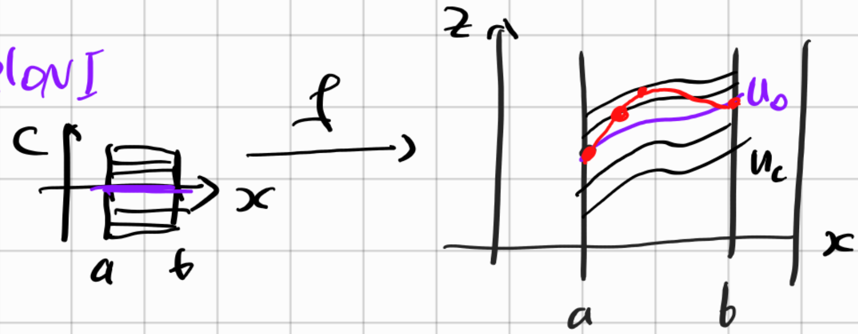
ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 4 - 9.3.2023

CALIBRAZIONI



$$f(x,c) = (x, u_c(x))$$

0661

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u,u')\,dx \geq \int_a^b M(x,u,u')\,dx = \int_a^b M(x,u_0,u_0')$$

$$\overset{\parallel}{F} = \mathcal{F}(u_0)$$

F convessa in p $\qquad \mathcal{P}(x, u_c(x)) = u_c'(x)$

$$M(x,z,p) = \underbrace{F(x,z,\mathcal{P}) - \mathcal{P}\cdot F_p(x,z,\mathcal{P}) + p\cdot F_p(x,z,\mathcal{P})}$$

$$\int_a^b M(x,u,u') = \int_{(x,u(x))} \alpha\,dx + \beta\,dz = \int \omega$$

$$\omega = \alpha\,dx + \beta\,dz$$

$$M(x,u(x),u'(x)) = F(x,u,\mathcal{P}(x,u)) - \mathcal{P}\cdot F_p(\ldots) + u'\cdot F_p(\ldots)$$

$$M\,dx = \left[F(\ldots) - \mathcal{P}\cdot F_p(\ldots)\right] dx + F_p\,dz$$

$$z = u(x) \qquad dz = u'\cdot dx$$

$$\omega = \left[F - \mathcal{P}\cdot F_p\right]\cdot dx + F_p\cdot dz$$

voglio dimostrare che ω è esatta.

Supponiamo che $G = f(\underset{x}{[a,b]} \times \underset{c}{[-\delta,\delta]})$

sia semplicemente connesso.

Basta dimostrare che ω è chiusa.

1- FORME DIFFERENZIALI

$$\omega : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$x \longmapsto \omega_x = \omega(x)$$
$$\omega(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \omega(x)[v]$$
$$\omega_x[v]$$

Es $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$x \longmapsto df_x \qquad df_x[v] = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

$$x_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\underline{x} = (x_1, \dots x_n) \mapsto x_k \qquad dx_k[v] = v_k \qquad dx_k(e_j) = \delta_{jk}$$

$$\| \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}$$

dx_k sono una base di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

ω è esatta se $\exists f : df = \omega$

$\Downarrow$ $f \in C^2$

ω è chiusa $\qquad \omega = \sum_k \alpha_k dx_k$

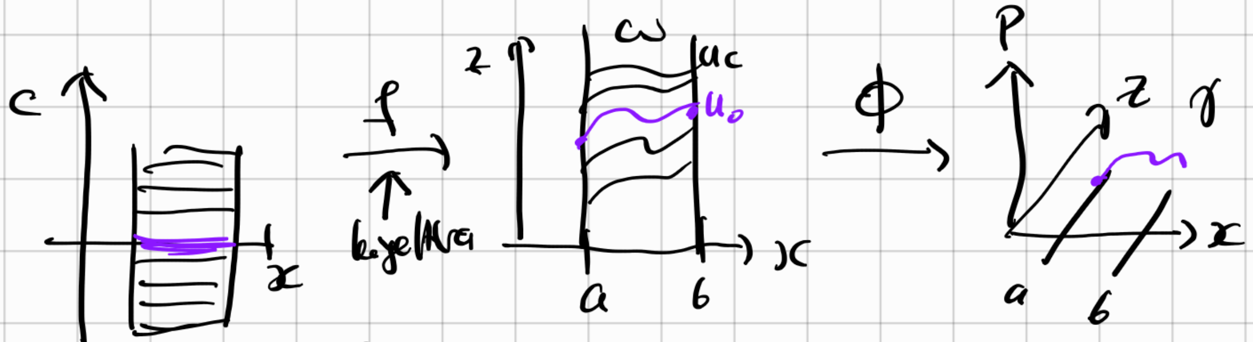
cioè $\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}$ $\qquad \alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \qquad\qquad \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}$$

$y = \phi(x)$

PULL-BACK: $\qquad \phi^* \omega(x)[v] = \omega(\phi(x))[d\phi[v]]$

$$\omega = (F - p F_p)\,dx + F_p\,dz$$



$$f(x,c) = (x, u_c(x))$$

$$\phi(x, \overset{z}{u_c(x)}) = (x, \overset{z}{u_c(x)}, u_c'(x))$$

$$\phi(x,z) = (x, z, p(x,z))$$

$$\downarrow$$

$$\gamma = (F - p\cdot F_p)\,dx + F_p\cdot dz + 0\cdot dp$$

$$\omega = \phi^* \gamma$$

ω è chiusa $\Leftrightarrow$ $f^*\omega$ è chiusa. (supponiamo che f sia un diffeomorfismo)

$$\left[\begin{array}{l} f^*\omega = dg \\ \omega = d(g \circ f^{-1}) \end{array}\right]$$

$f^*\omega = (\phi \circ f)^* \gamma$ è chiusa?

$$(\phi \circ f)(x,c) = (x, u_c(x), u_c'(x))$$

$$(\phi\circ f)^*\gamma = \left[F(x,u_c,u_c') - u_c' \cancel{F_p(x,u_c,u_c')}\right] dx + F_p(x,u_c,u_c')\,dz \uparrow$$

$$\underbrace{z = u_c(x)} \qquad dz = \cancel{u_c'(x)\,dx} + \frac{\partial u_c}{\partial c}(x)\,dc$$

$$= F(x,u_c,u_c')\,dx + F_p(x,u_c,u_c')\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c}(x)\cdot dc.$$

Bisogna distinguere se u è scalare o vettoriale.

OSS Se $\underline{u} = (u^1 \dots u^n) \in \mathbb{R}^n$ anche $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$

prodotto scalare

$$(\phi \circ f)^* \gamma = F(x, \underline{u_c}, \underline{u_c'})\, dx + \sum_j F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j}\, dc_j$$

---

(1) Se u è scalare $(\phi \circ f)^* \gamma$ è chiusa

$$= \frac{d}{dc} \underbrace{F(x, u_c, u_c')} - \frac{d}{dx} \left(\underbrace{F_p}(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

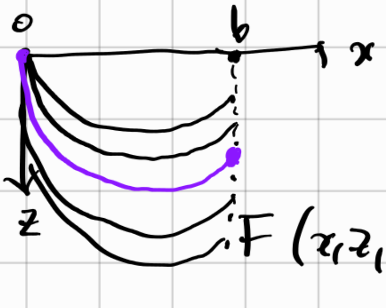
$$= \left(F_z \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c} + \cancel{F_p \cdot \frac{\partial}{\partial c} u_c'} \right) - \left(\left(\frac{d}{dx} F_p \right) \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c} + \cancel{F_p \cdot \frac{\partial}{\partial c} u_c'} \right)$$

$$= \underbrace{\left[F_z(x, u_c, u_c') - \frac{d}{dx} F_p(x, u_c, u_c') \right]}_{E.L.} \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c} = 0$$

Se u_c soddisfa E.L.

Teorema ($n=1$) Se u_c sono soluzioni di E.L. per la lagrangiana F, se u_c fibrano un intorno tubolare G di u_0, se G è semplicemente connesso, se F è convessa in p per ogni (x, z).

Allora u_0 è minimo di $\mathcal{F}$ tra tutte le u con stesso dato al bordo e grafico in G.



Esempio 1 (Brachistocrona)

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{z}}\, dx \qquad F(x, z, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z}}$$

$(p,z) \mapsto \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z}}$ non è convessa $\left[\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, H > 0 \\ \det H = \text{non ha un segno} \end{array}\right]$

ma $p \mapsto \sqrt{1+p^2}$ è convessa.

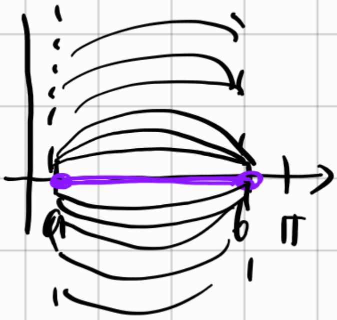
Idea: costruisco una fibratura tramite cicloidi.

Esempio 2 $\begin{cases} \mathcal{J}(u) = \int_a^b \underbrace{\left((u')^2 - u^2\right)}\, dx \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases}$ $F(x,z,p) = p^2 - z^2$

$F_z = -2z$

$F_p = 2p$

Sia $a > 0$, $b < \pi$.



E.L.: $F_z = \dfrac{d}{dx} F_p$ $\qquad -2u = \dfrac{d}{dx} 2u'$

$u'' + u = 0 \qquad u(x) = A \sin x + B \cos x = C \cdot \sin(x - x_0)$

$\begin{cases} u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

$u_0 \equiv 0$ è l'unica sol. di E.L. che soddisfa la condizione al bordo.

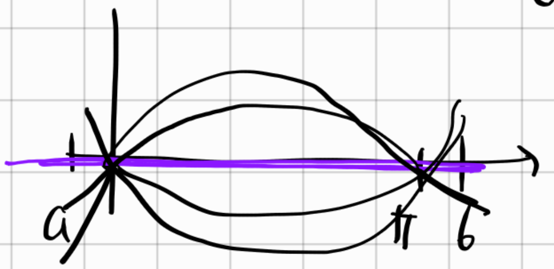
$u_c = C \cdot \sin x$

Posso concludere che u_0 è minimo globale di $\mathcal{J}$

Visto che $\mathcal{J}(u_0) = 0$ $\qquad \int_a^b u^2 \leq \int_a^b (u')^2$

se $u(a) = u(b) = 0$. $\qquad$ [dis. di Poincaré]

Oss Cosa succede se $(a,b) \supseteq [0,\pi]$ $\pi \leq b-a < 2\pi$



$u_0(x) = 0$ è l'unica sol. di E.L. con dato nullo al bordo

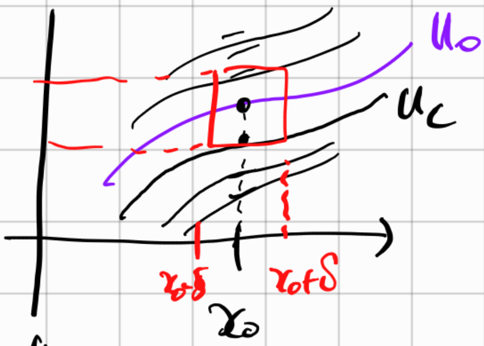
la fibrazione non esiste su tutto $[a,b]$.

In questi casi $u_0 = 0$ non è il minimo di $\mathcal{J}$.

In generale $\forall$ dato u_0 possiamo sperare di avere una fibrazione u_c solo localmente.

COSTRUZIONE LOCALE DELLA FIBRAZIONE

Caso scalare



u_0 soddisfa E.L.

Voglio costruire u_c.

① u_c soddisfi E.L: $F_z = \frac{d}{dx} F_p$

$$F_z(x, u_c, u_c') = \frac{d}{dx} F_p(x, u_c, u_c')$$

$$= F_{px}(\ldots) + F_{pz}(\ldots) \cdot u_c' + F_{pp}(\ldots) \cdot u_c''$$

se $F_{pp} \neq 0$ posso scrivere l'eq. in forma normale:

Scelgo u_c che risolve:

$$\begin{cases} u'' = F_{pp}^{-1}\left(F_z - F_{px} - F_{pz}\cdot u'\right) \\ \boxed{u_c(x_0) = \underline{u_0(x_0)} + c} \\ u'_c(x_0) = u_0'(x_0) \end{cases}$$ E.L.

$$\frac{\partial u_c}{\partial c}(x_0) = \frac{\partial c}{\partial c} = 1$$

Si può verificare che per $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

esiste una soluzione u_c, "$u_0 = u_0$" per unicità

Inoltre $f(x,c) = (x, u_c(x))$ è localmente invertibile se

$Jf(x_0, u_0(x_0))$ è invertibile.

$$Jf(x,c) = \begin{pmatrix} 1 & u_c'(x) \\ 0 & \frac{\partial u_c(x)}{\partial c} \end{pmatrix}, \quad Jf(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & u_0'(x_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Caso vettoriale</u>: prossima volta.