ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 10 - 30.3.2023

$$V(x,z) = \inf \left\{ \int_a^x F(t,u,u')\,dt : u(a)=z_a,\ u(x)=z \right\}$$

$$\begin{cases} V_x(x,z) + p\cdot V_z(x,z) \leq F(x,z,p) \\ V_x(x,u) + u'\cdot V_z(x,u) = F(x,u,u') \end{cases}$$

$$p\cdot V_z(x,z) - F(x,z,p) \leq -V_x(x,z)$$

$$\boxed{\max \ p\cdot V_z(x,z) - F(x,z,p)} = -V_x(x,z)$$

$$\underset{z=u(x)}{=} \quad u'\, V_z(x,u) - F(x,z,u').$$

Fissati x,z:

$$f(p) = F(x,z,p)$$

$$f^*(q) = \boxed{\sup_p \ p\cdot q - f(p)}$$

$$H(x,z,q) := f^*(q)$$

$$-V_x(x,z) = H(x,z,q) \qquad \text{con } q = V_z(x,z)$$

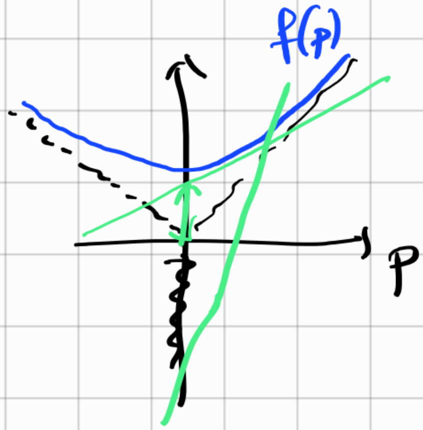
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} V + H = 0}$$ EQ. di Hamilton-Jacobi

$(x,z,p) \in \Omega$ spazio delle fasi dove è definita F

$(x,z,q) \in \Omega^*$ spazio delle cofasi dove è definita H.

Esempio (geodetiche)

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$$



$$f(p) = F(x,z,p) = \sqrt{1+p^2}$$

$$f^*(q) = \sup_p \left(q\cdot p - f(p) \right)$$

↳ derivata $\qquad q - f'(p) = 0$

$$q = f'(\underline{p})$$

$$f'(p) = F_p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = q$$

$$p^2 = q^2(1+p^2)$$

$$p^2(1-q^2) = q^2 \qquad \underline{p} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$f^*(q) = q\underline{p} - f(\underline{p}) = \frac{q^2}{\sqrt{1-q^2}} - f(\underline{p}) = \frac{q^2-1}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$\left(f(\underline{p}) = \sqrt{1+\underline{p}^2} = \sqrt{1+\frac{q^2}{\underset{+\infty}{1-q^2}}} = \frac{1}{\underset{+\infty}{\sqrt{1-q^2}}} \right)$$

$$= -\frac{1-q^2}{\sqrt{1-q^2}} = -\sqrt{1-q^2}$$

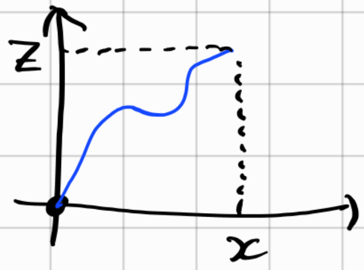
questo è giusto se $|q| < 1$ ← la retta è tangente

anche $|q| = 1$ ← la retta è un asintoto obliquo

se $|q| > 1 \quad f^*(q) = +\infty$.

$$H(x,z,q) = -\sqrt{1-q^2} \qquad F(x,z,p) = \sqrt{1+p^2}$$

$$V(x,z) = \sqrt{x^2+z^2}$$



lunghezza della curva più corta.

In effetti: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$

Eq. H J.: $\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,z) + H(x,z,q) = 0}$

$$q = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} - \sqrt{1-\left(\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)} \overset{?}{=} 0$$

$x>0$

$$\parallel$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = 0$$

Lasciando V incognita:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x,z,\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \sqrt{1-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = 0 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 1 \qquad \text{(Eq. eikonale)}$$

$$\boxed{|\nabla V| = 1.}$$

Equazioni di Hamilton

per le traiettorie nello spazio Ω^* delle co-fasi.

$(x,z,p) \in \Omega$

$(x,z,q) \in \Omega^*$

$$\boxed{H(x,z,q) = pq - F(x,z,p)}$$

q e p si corrispondono se p è il punto di massimo in questa espressione

$$q = F_p(x,z,p)$$

$$(*) \quad H(x,z,F_p(x,z,p)) = p\cdot F_p(x,z,p) - F(x,z,p)$$

$$\frac{d}{dp}(*): \quad H_q \cdot F_{pp} = \cancel{F_p} + p\cdot F_{pp} - \cancel{F_p} \qquad (F_{pp} > 0)$$

$$\boxed{H_q = p}$$

$$\frac{d}{dx}(*): \quad H_x + \cancel{H_q \cdot F_{px}} = \cancel{p\cdot F_{px}} - F_x$$

$$\boxed{H_x = -F_x}$$

$$\frac{d}{dz}(*): \quad H_z + \cancel{H_q \cdot F_{pz}} = \cancel{p\cdot F_{pz}} - F_z$$

$$\boxed{H_z = -F_z}$$

$$\begin{cases} H_q = p \\ H_x = -F_x \\ H_z = -F_z \end{cases}$$

E.L. $$\frac{d}{dx} F_p(x,u,u') = F_z(x,u,u')$$

$$u' = p \qquad q = F_p(x,u,u')$$

$$q'(x) = F_z(x,u,p) = -H_z(x,u,q)$$

$$u' = p = H_q$$
$$q' = F_z = -H_z$$

$$\boxed{\begin{cases} u'(x) = H_q(x, u(x), q(x)) \\ q'(x) = -H_z(x, u(x), q(x)) \end{cases}}$$

EQ. di HAMILTON

NOTAZIONE

NOI	MECCANICA	
F	L	lagrangiana
x	t	tempo
u	q	coordinate generalizzate
$p = u'$	$\dot{q}$	
$V, \mathcal{F}$	S	azione
H	$\mathcal{H}$	hamiltoniana
q	p	momento generalizzato (o coniugato)

DERIVATA DEBOLE (SPAZI di SOBOLEV)

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}(u\cdot\varphi) = \int_{\partial\Omega} u\cdot\varphi\cdot\nu_\Omega^k$$

se $\varphi\in C_c^\infty$ il lato destro è nullo

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\varphi = -\int_\Omega u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}}.$$

se $\varphi\in C_c^\infty$
se $u\in C^1$

Si dice che $\underline{v}\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ è la derivata debole di u

se $\int_\Omega \underline{v}^k\cdot\varphi = -\int_\Omega u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$.

basta $u\in L^1(\Omega)$.

una sola derivata

Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u\in L^p(\Omega)$ tali che esiste $\underline{v}\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ che è la derivata debole di u.
Si scrive $\underline{v}=\underline{\nabla}u$ come se fosse l'usuale derivata.

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Si trova che $W^{1,p}$ è completo (è un Banach).

Teoremi di immersione (Sobolev)

α-Hölder

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{se } 1-\frac{n}{p} > \alpha.$$

se $p>n$ sono funzioni continue.

(Ω limitato, $\partial\Omega$ regolare)

METODO DIRETTO

successione minimizzante

$\mathcal{F}: X \to \mathbb{R}$ $\quad \exists\, x_k \in X$ t.c. $\mathcal{F}(x_k) \to \inf_X \mathcal{F}$

se
- X è sequenzialmente compatto: $\exists\, x_{k_j} \to x \in X$
- $\mathcal{F}$ è s.c.i su X allora $\mathcal{F}(x) \leq \liminf \mathcal{F}(x_{k_j}) = \inf_X \mathcal{F}$

allora $\exists\, x$ t.c. $\mathcal{F}(x) = \min_X \mathcal{F}$.

A noi interessa il caso $n=1$ dove tutto è più semplice e possiamo dare risultati più precisi.

Ci interessa $W^{1,1}([a,b])$ dove abbiamo:

(I) $u \in L^1$: $\int_a^b u \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$ allora $u = 0$

(II) $u \in W^{1,1}$ $\quad \int_a^b u \cdot \varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

$$\| $$

$$-\int u' \cdot \varphi \implies u' = 0 \text{ in } L^1.$$

$$\implies u = c.$$

A posteriori $W^{1,1}([a,b]) \cong AC([a,b]) \subseteq C^0([a,b])$

Funzioni assolutamente continue.

Questo motiva il seguito del corso.

$\}$

ASSOLUTA CONTINUITÀ

Def Diremo che $u: I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, è assolutamente continua se:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. se $I_1,\dots,I_N$ sono intervalli a2a2 disgiunti $I_k=[a_k,b_k]\subseteq I$ tali che

$$\sum_{k=1}^{N} (b_k-a_k)<\delta$$

Allora

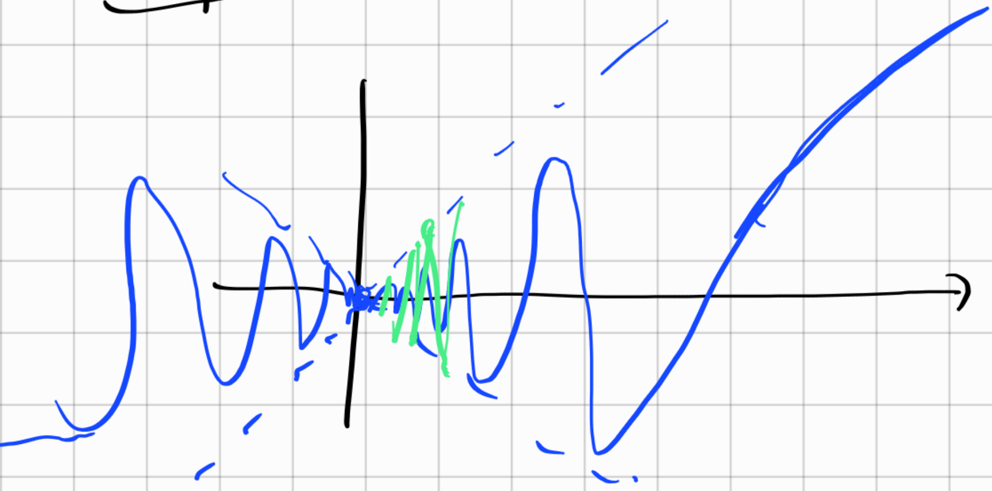
$$\sum_{k=1}^{N} |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

Chiamiamo $AC([a,b]) = \{f:(a,b)\to\mathbb{R} : f \text{ assolut. continua}\}$

Oss 1 Se $f\in AC$ allora f è uniformemente continua. (Basta prendere un singolo intervallo).

Oss 2 Se $f\in Lip$ allora f è AC.

Esempio $f\in UC\setminus AC$: $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$



PROSSIMA VOLTA