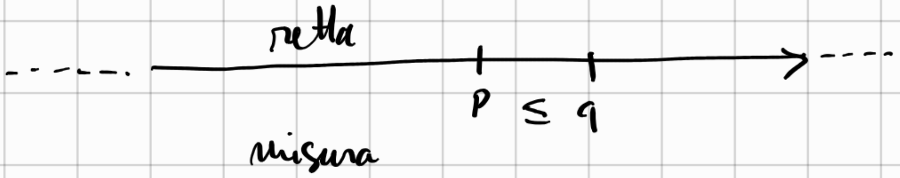
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 9 - 10.10.2022

<u>ES</u> 2 test settimanale

$$\frac{(2n)!}{n!} \geq n^n$$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{(2n)!}{n!} = & (2n) & (2n-1) & \cdots & (n+1) \\ & \vee & \vee & & \vee \\ n^n = & n \cdot & n \cdot & \cdots\cdots & \cdot n \end{array}$$

NUMERI REALI



<u>Def</u> (Relazione d'ordine) Una relazione $\leq$ su un insieme R si dice essere una **relazione d'ordine** se soddisfa le seguenti proprietà: $\forall x,y,z \in R$

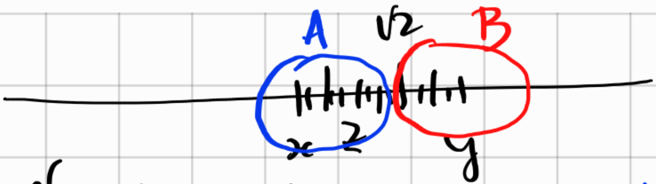
1. riflessiva: $x \leq x$
2. antisimmetrica: $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
3. transitiva: $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

diremo inoltre che l'ordine è **totale** o **lineare** se

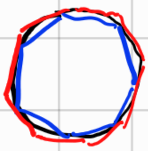
4. dicotomia: $x \leq y$ o $y \leq x$.

diremo che l'ordinamento é **denso** se $\quad x<y$ se $\begin{cases} x \leq y \\ x \neq y \end{cases}$

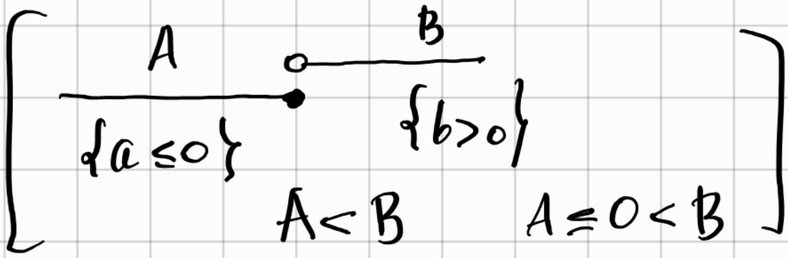
5. dati $x<y$ esiste $z \in R$ t.c. $x<z<y$



diremo che l'ordinamento è continuo se (o completezza)



6. dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
se $A \le B$ (cioè $\forall a \in A\ \forall b \in B : a \le b$)
esiste $c \in \mathbb{R}$: $A \le c \le B$
(cioè $\forall a \in A, \forall b \in B : a \le c \le b$).



$A < B \qquad A \le 0 < B$

Costruzione degli insiemi numerici:

$0, +, \cdot \quad \mathbb{N}$ c'è per assioma (infinito) $0, 1, 2, 3 \dots$

$\cap\!|$

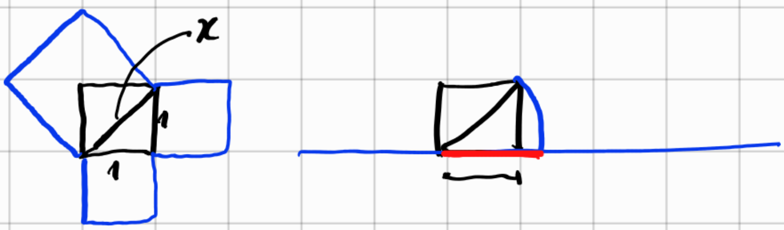
$0, \pm, \cdot \quad \mathbb{Z} \quad \left(\mathbb{N} - \mathbb{N} \,/\, \sim\right) \quad \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

$\cap\!|$

$0, \pm, \cdot, / \quad \mathbb{Q} \quad \left(\dfrac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}\right) \Big/ \sim \quad \dots 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{2} \dots$

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q$$

<u>Teorema</u> (Pitagora) L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$.



dim Per assurdo $\exists\, x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$. (suppongo $x > 0$).

$x = \frac{p}{q} \qquad p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Supponiamo che p e q non abbiano fattori in comune

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad\qquad p^2 = 2q^2$$

p^2 è pari $\Rightarrow$ p è pari $\Rightarrow$ p^2 è multiplo di 4

q è pari $\Leftarrow$ q^2 è pari $\qquad q^2 = \frac{p^2}{2}$

$\Rightarrow$ 2 è fattore comune di p e q $\Rightarrow$ assurdo $\square$

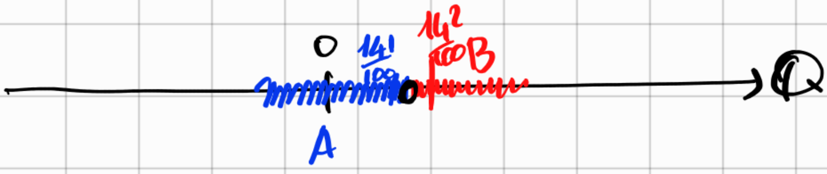
$\mathbb{Q}$ ha un ordinamento totale, denso, ma non continuo

Es ($\mathbb{Q}$ non è continuo)

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\} = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0,\ b^2 \geq 2\} = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0,\ b^2 > 2\}$$

Si può verificare che $A \leq B$.



ma se esistesse $c \in \mathbb{Q}$: $A \leq c \leq B \Rightarrow c^2 = 2$ assurdo $\square$

intuitivamente.

Def (Gruppo) Diremo che R è un gruppo se c'è una operazione $*$ tale che

1. associativa: $(x * y) * z = x * (y * z)$
2. esiste elemento neutro: $\exists\, e : x * e = e * x = x$
3. esiste l'inverso: $\forall x \in R\ \exists\, y \in R : x * y = y * x = e$

Diremo che il gruppo è commutativo o abeliano se

4. $x * y = y * x$.

Se $* = +$ diciamo che il gruppo additivo $e = 0$

Se $* = \cdot$ " " " moltiplicativo $e = 1$.

Def Se $\mathbb{R}$ ha una relazione d'ordine $\leq$ ed è un gruppo $(*, e)$ diremo che $\mathbb{R}$ è un gruppo ordinato se vale:

- monotonia: $x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x * z \leq y * z \\ z * x \leq z * y \end{cases}$

$\boxed{\text{$\mathbb{R}$ è un gruppo additivo abel totalmente ordinato denso e continuo con $1 \in \mathbb{R}$, $1 > 0$.}}$

- Sul Giusti $\mathbb{R}$ è un campo ordinato continuo

$$(\mathbb{R}, 0, +, \leq, 1) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +, \leq, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, a^x), \ \sqrt{x}, \ \dots, \ (\mathbb{R}, \sin x, \cos x)$$