ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 20 - 7.11.2022

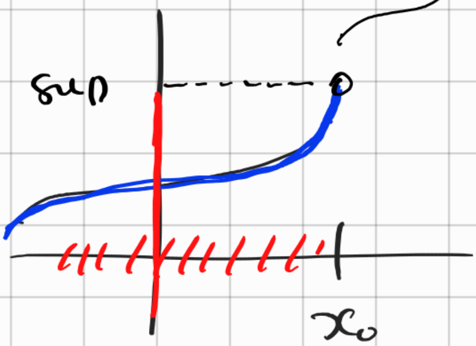
Limite di fn. monotona. [GIÀ VISTO NELLA LEZIONE 19]

Teorema. Se $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente,

x_0 punto di accumulazione di A

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$$

↑ il limite esiste.

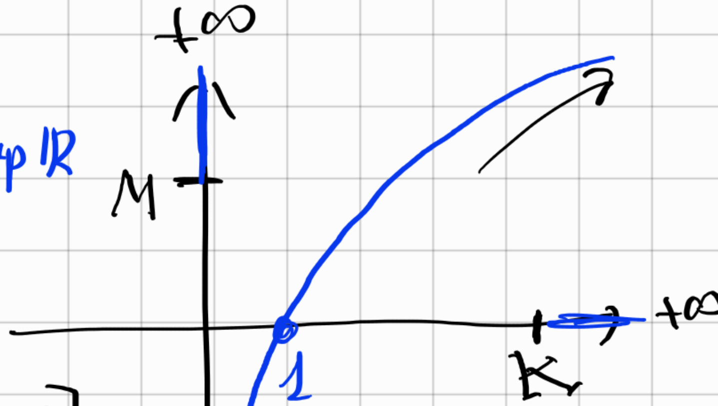


Se x_0^+ è punto di accumulazione

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$$

Es

$$\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty = \sup \mathbb{R}$$



$\forall V$ intorno basilare di $+\infty$ $\qquad V = (M, +\infty]$

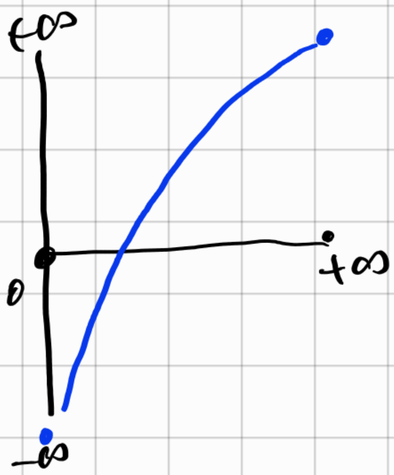
$\exists U$ intorno di $+\infty$ $\qquad U = (K, +\infty]$

tale che $\forall x > 0$: $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} : \exists K \in \mathbb{R} : \forall x > 0 : x > K \Rightarrow f(x) > M}$$

$\rightarrow$ [U intorno di $x_0 \Rightarrow x_0 \in U$]

Nota Se definiamo $f:[0,+\infty] \to [-\infty,+\infty]$

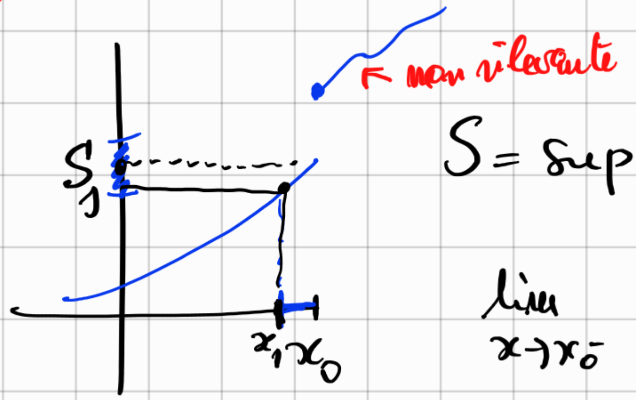


$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & \text{se } x \in (0,+\infty) \\ -\infty & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x = +\infty \end{cases}$$

f risulta essere continua.

(**Es**
$$\lim_{x \to +\infty} \log_2 \log_2 x = \lim_{x \to +\infty} (f \circ f)(x) =$$
$$= (f \circ f)(+\infty) = f(f(+\infty))$$
$$= f(+\infty) = +\infty.$$
)

dim f crescente, x_0^- punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$.



$$S = \sup\{f(x) : x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \overset{?}{=} S$$

S è il minimo dei maggioranti di $B = \{f(x) : x < x_0\}$

(i) $S \geq f(x) \quad \forall x < x_0$

(ii) se $s < S \quad \exists\, x_1 < x_0 : f(x_1) > s$

Siccome f crescente:

$\forall x \in (x_1, x_0)$: $S < f(x_1) \le f(x) \le S'$

$x_1 < x < x_0$

$\forall V$ intorno di S' $\exists s < S$: $(s, S] \subseteq V$

$\exists x_1 < x_0$ t.c. $\forall x \in (x_1, x_0)$: $f(x) \in [s, S'] \subseteq V$.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = S'. \qquad \square$$

Esercizio (difficile ***) Se $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona l'insieme

$$X = \{x \in A : f \text{ non è continua in } x\}$$

è numerabile $\#X = \#\mathbb{Q}$ $(= \#\mathbb{N})$

SUCCESSIONI

$\vec{a}$ $\quad$ **a**

$\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $(\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{C})$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad$ $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ $\quad$ $a_k \in \mathbb{R}$ $\quad$ $k \in \mathbb{N}$.

$\underline{a}(k) = a_k$ $\quad$ $\underline{a}$ è una $\mathbb{N}$-upla

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & (\bullet) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \quad \bullet\ +\infty \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & & n & & \end{matrix}$$

sono punti isolati (non sono di accumulazione) di $\mathbb{N}$.

$+\infty \notin \mathbb{N}$ ma $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{R}}$

Ha senso scrivere $\boxed{\lim_{k \to +\infty} a_k}$ o $\boxed{a_k \to \ell}$ per $k \to +\infty$

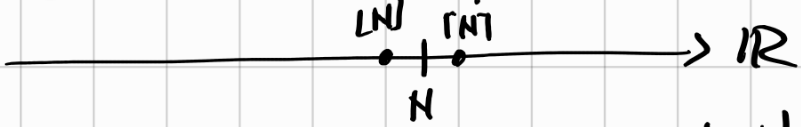
$\lim a_k$

Ripetiamo le definizioni

(1) $a_k \to \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ (diremo che a_k converge) $\ell \in \mathbb{R}$

$\ell - \varepsilon < a_k < \ell + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \quad k > N \Rightarrow |a_k - \ell| < \varepsilon .$



$k > N \Rightarrow k > \lfloor N \rfloor$

$\Leftarrow \quad k > \lceil N \rceil$

$\lfloor x \rfloor = \max\{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \}$

$\lceil x \rceil = \min\{ n \in \mathbb{Z} : n \geq x \}$

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x .$

(2) $a_k \to +\infty$ significa:

$\forall M \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \quad k > N \Rightarrow a_k > M$

(3) $a_k \to -\infty$ significa:

$\forall M \in \mathbb{R} : \exists N : \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \quad k > N \Rightarrow a_k < -M$

Nei casi (2) e (3) diremo che a_k <u>diverge</u>

(4) Se $\lim a_k$ non esiste diremo che

a_k è <u>indeterminata</u>

Problema: determinare il carattere di una successione

- convergente
- divergente
- indeterminata.

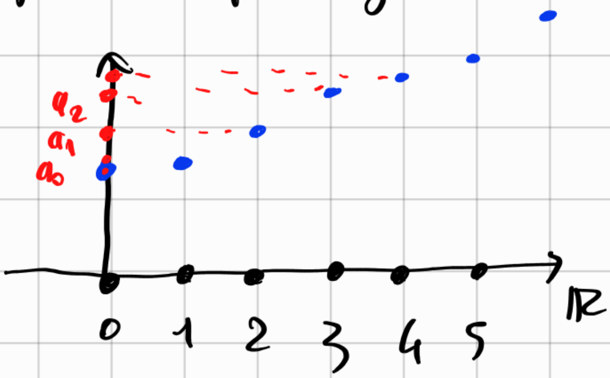
regolare

MONOTONIA

$x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

a_k è crescente se: $k > j \Rightarrow a_k \geq a_j$

definizione più semplice: $a_{k+1} \geq a_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$



a_k è decrescente: $\forall k \in \mathbb{N}: \ a_{k+1} \leq a_k$

a_k è strett. crescente: $\forall k \in \mathbb{N}: \ a_{k+1} > a_k$

" decrescente: $\forall k \in \mathbb{N}: \ a_{k+1} < a_k$

Teorema (carattere delle succ. monotone).

Se a_k è monotona allora a_k è regolare.

Cioè $\exists \, \ell \in [-\infty, +\infty]$: $a_k \to \ell$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \ell.$$

Più precisamente: se a_k è crescente $\lim_{k\to+\infty} a_k = \sup_k a_k$

$$\sup a_k = \sup\{a_k : k\in\mathbb{N}\}$$

ES $a_k = \frac{1}{k+1}$ è strettamente decrescente quindi è regolare

$$\lim_{\substack{k\to+\infty\\(k\in\mathbb{N})}} \frac{1}{k+1} = 0 \Leftarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0 = \inf\left\{\frac{1}{x+1} : x>0\right\}$$

$$\parallel$$

$$\inf\left\{\frac{1}{k+1} : k\in\mathbb{N}\right\}$$

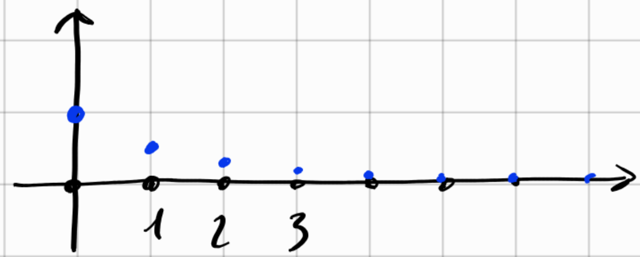
LIMITATEZZA

a_k è <u>limitata</u> se $\exists M\in\mathbb{R}$ t.c. $\forall k\in\mathbb{N}$ $|a_k|\le M$

$$-M \le a_k \le M$$

Se a_k è limitata allora non è divergente

ES $a_k = \frac{1}{k+1}$ è una succ. limitata



$$-1 \le 0 \le a_k \le 1$$

a_k non è divergente

RICEVIMENTO: Martedì 15^{30} –