ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 24 - 16.11.2022

PUNTI LIMITE

carattere di a_n: $\begin{cases} \text{regolari} \begin{cases} \text{convergenti} \\ \text{divergenti} \end{cases} \\ \text{indet.} \end{cases}$

SOTTOSUCCESSIONE o ESTRATTA

a_n successione, n_k successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	$k \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5
$a_n \in \mathbb{R}$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	...			k_0	k_1				

$$b_k = a_{n_k}$$

Es $\quad a_n = n^2 \qquad n_k = 2k \qquad L = \{+\infty\}$

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k} = (2k)^2$$

a_n: 0 1 4 9 16 ...
b_k: 0 4 16 ...

$L = \{1, -1\}$

Esempio $\quad a_n = (-1)^n$ è indeterminata $\quad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ non esiste.

a_n: $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

- $n_k = 2k \qquad a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1.$
  a_{n_k} è convergente.
- $n_k = 2k+1 \qquad a_{n_k} = -1 \to -1.$
- $n_k =$ k-esimo numero primo.

Def (punti limite) Sia a_n una successione

l'insieme $L = \left\{ \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ è una estratta regolare} \right\}$

si chiama insieme dei <u>punti limite</u> di a_n

Nota Se a_n è regolare: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in [-\infty, +\infty]$

ogni estratta a_{n_k} ha lo stesso limite.

$L = \{\ell\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

n_k strettamente crescente, $n_k \in \mathbb{N} \Rightarrow n_k \to +\infty$

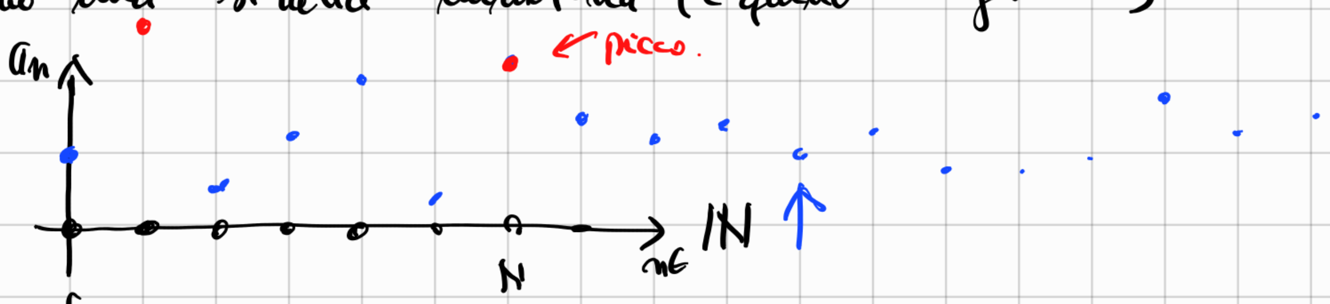
$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} \underbrace{=}_{n=n_k} \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

Domanda L può essere vuoto? No

Es $a_n = \sin n$ $\qquad L = [-1,1]$ ← difficile

Lemma Ogni successione a_n (in $\mathbb{R}$) ha almeno una estratta monotona (e quindi regolare)

dim



$P = \{ n \in \mathbb{N} : \forall k > n : a_k \le a_n \}$

P può essere finito o infinito.

- Se P è finito: sia $N = \max P$ ($N = 0$ se $P = \emptyset$)
  $\forall n > N : \exists k > n : a_k > a_n$
  Prendo $n_0 = N+1$ ... $n_{k+1} > n_k : a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$

  a_{n_k} è strettamente crescente.

- Se P è infinito: $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$
  $p_0 < p_1 < p_2 < \ldots$
  $\Rightarrow p_k \in P \quad a_{p_{k+1}} \le a_{p_k} \quad (a_{p_k} \ge a_n \ \forall n > p_k)$

  a_{p_k} è decrescente. $\square$

Nota se $\sup a_k = +\infty \quad P = \emptyset$.
posso fare in modo che $a_{n_k} \to +\infty$

(Ad es. $a_{n_k} > k$)

Teorema (Bolzano-Weierstraß) Da ogni successione a_n di numeri reali posso ottenere una sottosuccessione regolare. (dimostrato dal lemma)
Inoltre:

- Se a_n è limitata l'estratta è convergente (l'estratta è limitata e quindi non può tendere a $\pm\infty$)

- Se a_n non è limitata esiste almeno una estratta divergente. (vedi Nota)

Corollario Se $A \subseteq \mathbb{R}$, A infinito
$\Downarrow$
$\exists\, a_n \in A$ iniettiva

a_n ha una stretta regolare $a_{n_k} \longrightarrow \ell$
$\in \overline{\mathbb{R}}$
ℓ è un punto di accumulazione per A.

Se A è limitato $\ell \in \mathbb{R}$.

Sia L l'insieme dei punti limite di a_n.

- $L \neq \emptyset$ per B-W
- se $\# L = 1$ $\quad L = \{\ell\}$ $\quad a_n \overset{?}{\longrightarrow} \ell$ Sì

Teorema ~~Se a_n è una successione tale che $\exists\, \ell$ t.c. ogni stretta regolare a_{n_k} ha limite ℓ. Allora a_n ha limite ℓ.~~

Teorema Sia a_n una successione tale che
$\exists\, \ell$ t.c. da ogni stretta a_{n_k} posso estrarre una sotto-sotto-successione $a_{n_{k_j}} \longrightarrow \ell$.

Allora $a_n \to \ell$.

dim Per assurdo se non$(a_n \to \ell)$ significa

che $\exists\, U$ intorno di ℓ t.c. frequentemente $a_n \notin U$.
allora $\exists\, a_{n_k} \notin U$. a_{n_k} ha una stretta $a_{n_{k_j}} \to \ell$
$a_{n_{k_j}} \in U$ definitivamente
Assurdo! $\square$

Se $L = \{\ell\}$ allora $a_n \to \ell$.

Se $\# L > 1$ a_n non è regolare.

Il difetto dell'operatore lim è che non è sempre definito

Introduciamo degli operatori limsup e liminf definiti su tutte le successioni

$$\left.\begin{array}{l} \limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup L \\ \liminf_{n\to+\infty} a_n = \inf L \end{array}\right\} L = \{\text{punti limite}\}$$

<u>Note</u> $\lim a_n$ esiste $\Leftrightarrow$ limsup = liminf = lim

Se $\lim a_n$ non esiste limsup > liminf

Esercizio trovare a_n t.c. $L = \mathbb{R}$.

<u>Esercizio</u> $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ $\quad 0 \le a_n < 1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	0	0	$\sim 0{,}41$	$\sim 0{,}7$	0	$\sqrt{5}-2$	$\sqrt{6}-2$	$\sqrt{7}-2$	$\sqrt{8}-2$	0	

$L \subseteq [0,1]$

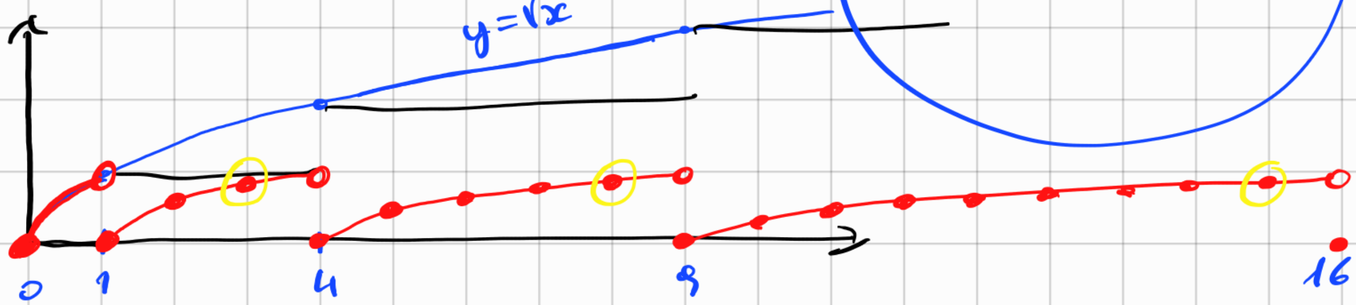
$0 \in L$? sí $\quad n_k = k^2 \quad a_{n_k} = \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor$

$= k - \lfloor k \rfloor = 0.$

$1 \in L$? $\quad n_k = k^2 - 1$

$a_{n_k} = \sqrt{k^2-1} - \lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor$

$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = ? \quad [1]$



chi é L ? $\quad \boxed{L = [0,1]}$

Teo L è chiuso. Se $\ell_k \in L$, $\ell_k \to \ell \in \mathbb{R}$
Allora $\ell \in L$.

dim

$$\begin{array}{ccccccc} \ell_0 & \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_j & \longrightarrow & \ell \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ a_{n^1_k} & a_{n^2_k} & a_{n^3_k} & & a_{n^j_k} & & \end{array}$$

$a_{n^k_k} \to \ell$

$$\begin{array}{lllll} a_{n^1_0} & a_{n^1_1} & {}^1_2 & {}^1_3 & {}^1_4 \\ {}^2_0 & {}^2_1 & {}^2_2 & & \end{array}$$

$\square$

Teorema (convergenza alla Cesàro).

1. Se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \to \ell$.

2. Se $a_n > 0$, $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell}$ allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$.

Es $a_n = \sqrt[n]{n!}$ $\lim a_n = ?$

Es $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ $\lim a_n = ?$ [e]

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{b_n} \qquad b_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cancel{(n+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)}}$$

$$\to e.$$

□