ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 28 - 25.11.2022

SERIE A TERMINI POSITIVI

criterio del rapporto/radice, confronto asintotico, condensazione di Cauchy.

$$\boxed{p>1 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{k^p} < +\infty}$$

$$\boxed{\sum q^k < +\infty \quad |q|<1}$$

ES $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$ converge $\qquad \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^p} \qquad p=\frac{3}{2}$

Oss se $0<q<1$ $\qquad q^k << \frac{1}{k^2}$

ES $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^p} \qquad p=\frac{1}{2}$

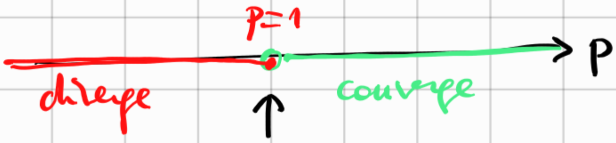
ES

$$\sum \frac{1}{k\sqrt{1+k}} \qquad \frac{1}{k\sqrt{1+k}} \sim \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

Lo ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$ che è convergente.

$\sum \frac{1}{k^p}$ converge se $p>1$

$$\frac{1}{k^p} << \frac{1}{k^q} \qquad \text{se } p>q$$



$$\frac{1}{k^p} << a_k << \frac{1}{k}$$

$\forall p>1$

$\sum$ converge $\qquad \sum$ diverge

ES $\boxed{\sum \frac{1}{k \ln^q k} \text{ converge?}} \qquad \frac{1}{k^p} << \frac{1}{k\ln^q k} << \frac{1}{k}$ $\quad \forall p>1$

Se $p>1$ $\qquad \frac{1}{k^p} \overset{?}{<<} \frac{1}{k\ln^q k}$ $\qquad \varepsilon = p-1>0$

$$\frac{\frac{1}{k^p}}{\frac{1}{k\ln^q k}} = \frac{k\ln^q k}{k^p} = \frac{\ln^q k}{k^{p-1}} = \frac{\ln^q k}{k^{\varepsilon}} \to 0 \qquad \boxed{\ln^q k << k^{\varepsilon}}.$$

Per condensazione: $\left(\frac{1}{k\ln^q k}>0 \text{ per } k\geq 2,\ \frac{1}{k\ln^q k} \text{ decrescente}\right)$

$\sum \frac{1}{k\ln^q k}$ ha lo stesso carattere di $\sum \cancel{2^k}\cdot\frac{1}{\cancel{2^k}\ln^q 2^k} = \sum \frac{1}{k^q \ln^q 2}$ $\begin{cases} q\leq 1 \text{ diverge} \\ q>1 \text{ converge.}\end{cases}$

$$\boxed{\sum \frac{1}{k\ln^q k} = \begin{cases} \text{divergente se } q\leq 1 \\ \text{convergente se } q>1. \end{cases}}$$

Nota $\qquad \sum \frac{1}{k^p\cdot \ln k}$ è $\begin{cases} \text{divergente se } p=1 \\ \text{convergente } \quad p>1 \\ \text{divergente } \quad p<1 \end{cases}$ $\qquad \boxed{k\to+\infty}$

Se $p>1$: $\quad k^p\ln k >> k^p \qquad \frac{1}{k^p\ln k} << \frac{1}{k^p} \qquad \sum\frac{1}{k^p} < +\infty$

Se $p<1$: $\quad k^p\ln k << k \qquad \frac{1}{k^p\ln k} >> \frac{1}{k} \qquad \sum \frac{1}{k} = +\infty$

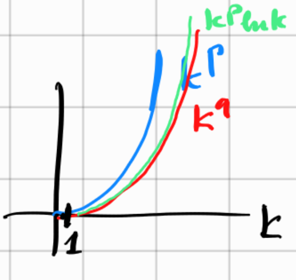
$[\ln k << k^{1-p} \Rightarrow k^p\ln k << k^p\cdot k^{1-p}]$

Es $\quad \sum \frac{1}{k\ln^2 k}$ è convergente

$\quad \sum \frac{1}{k\ln k}$ è divergente

Es $\quad \sum \frac{1}{k\cdot\ln k\cdot(\ln\ln k)^q}$ $\qquad$ [converg. $\Leftrightarrow q>1$].

Es $\quad \sum \frac{1}{k\ln^2 k\sqrt{\ln\ln k}}$ $\qquad$ [è convergente].



SERIE A SEGNO VARIABILE (o COMPLESSE)

$a_k \in \mathbb{R}$ (o $a_k \in \mathbb{C}$) $\qquad |a_k| \geq 0$

Teo $\sum a_k$ converge $\Longleftarrow$ se $\sum |a_k|$ converge $\qquad a_k \in \mathbb{C}$

(criterio di convergenza assoluta)

def Se $\sum |a_k|$ converge diremo che la $\sum a_k$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Es $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k^3} \qquad -\frac{1}{1} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} - \dots$

è convergente perché è assolutamente convergente

$$\left|\frac{(-1)^k}{k^3}\right| = \frac{1}{k^3} \qquad \sum \frac{1}{k^3} < +\infty.$$

dim Teorema

Sia $a_k \in \mathbb{R}$

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

$$a_k^- = \begin{cases} -a_k & \text{se } a_k \leq 0 \\ 0 & \text{se } a_k > 0 \end{cases}$$

$a_k = a_k^+ - a_k^-$

con $a_k^+ \geq 0$ e $a_k^- \geq 0$

$$|a_k| = \underbrace{a_k^+ + a_k^-} \qquad \begin{aligned} 0 \leq a_k^+ \leq |a_k| \\ 0 \leq a_k^- \leq |a_k| \end{aligned}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{convergente}}}{\sum |a_k| < +\infty} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_k^+ \\ \sum a_k^- \end{cases} \text{sono convergenti}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum(a_k^+ - a_k^-) \text{ è convergente}$$

$$\| $$

$$\sum a_k. \qquad \square$$

Anzi: Più precisamente, se $\sum a_k$ è regolare:

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \le \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|}_{\text{non è mai indeterminata}}$$

L'unico caso interessante:

$$\sum |a_n| < +\infty$$

In tal caso $\sum a_k$ è convergente

$|x+y| \le |x|+|y|$ disuguaglianza di convessità per induzione

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

$\boxed{x \mapsto |x| \text{ è continua}}$

$$\downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right|$$

Passando al limite $\left|\sum a_k\right| \le \sum |a_k|$ $\square$

ES (serie esponenziale)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $x>0$ applico il criterio del rapporto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \quad \text{converge}$$

se $x<0$ $x = -|x|$

$x^k = (-1)^k |x|^k$

quindi $\sum \frac{x^k}{k!}$ è assolutamente converge quindi è convergente

Lo stesso vale su $\mathbb{C}$:

$$\sum \frac{z^k}{k!} \text{ è convergente (su } \mathbb{C}) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

perchè è assolutamente convergente $\sum \left|\frac{z^k}{k!}\right| = \sum \frac{|z|^k}{k!}$

<u>dim</u> teorema di convergenza assoluta nel caso $\mathbb{C}$

$a_k \in \mathbb{C}$ $\qquad a_k = x_k + i \cdot y_k \qquad x_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x_k^2} = |x_k| \leq |a_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$

$\sqrt{y_k^2} = |y_k| \leq |a_k|$

convergenti

$$\text{Se } \sum |a_k| < +\infty \Rightarrow \begin{cases} \sum |x_k| < +\infty \Rightarrow \sum x_k \text{ converge} \\ \sum |y_k| < +\infty \Rightarrow \sum y_k \text{ converge} \end{cases}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \sum y_k = Y \Rightarrow \sum i y_k = iY \\ \sum x_k = X \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (x_k + i y_k) = X + iY}$$

linearità $\Downarrow$

$\sum (x_k + i y_k)$ converge. □

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

---

teorema Leibniz

Esempio $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ è convergente ma non assolutamente convergente

serie armonica a segni alterni

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots\dots$$

$$\left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \frac{1}{k} \qquad \sum \frac{1}{k} = +\infty \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{k}$$

$$b_k = \frac{1}{k}$$

$\frac{(-1)^k}{k} \to 0$ la condizione necessaria è soddisfatta.

<u>Teorema</u> [Criterio di Leibniz di convergenza per le serie a segni alterni]

Sia $a_k = (-1)^k \cdot b_k$, $b_k \geq 0$ (cioè $b_k = |a_k|$).

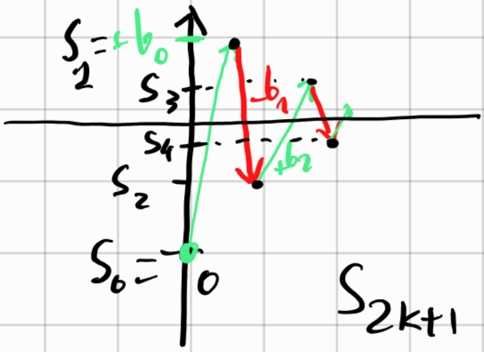
Sia b_k decrescente, $b_k \to 0$.

Allora $\sum a_k$ è convergente.

<u>dim</u> $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot b_k$

$b_k \geq 0$
b_k decrescente

$$[= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots]$$



$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b_k$$

S_{2k+1} sono decrescenti: $S_{2k+3} = S_{2k+1} + a_{2k+1} + a_{2k+2}$
$= S_{2k+1} \underbrace{- b_{2k+1} + b_{2k+2}}_{\leq 0}$
$\leq S_{2k+1}$

S_{2k} sono crescenti:

$$S_{2k+2} = S_{2k} + a_{2k} + a_{2k+1}$$
$$= S_{2k} + \underbrace{b_{2k} - b_{2k+1}}, \geq S_{2k}$$

$$S_{2k+1} \to S$$

$$S_{2k+2} = S_{2k+1} + a_{2k+1} = \underset{\nearrow S}{S_{2k+1}} - \underset{\nearrow 0}{b_{2k+1}}$$

$$S_{2k+2} \to S$$

$$b_{2k+1}$$

$$S_0 \le S_2 \le S_4 \le \dots \le S_{2k} \le S \le S_{2k+1} \le \dots \le S_5 \le S_3 \le S_1$$

ε

$$S_0 \le S \le S_1 \qquad S \text{ è finito} \qquad \square$$

$$S_n \to S$$

$$\left(S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad S_0 = 0. \right)$$

Oss $\displaystyle \sum \frac{(-2)^k}{k} = \sum \frac{(-1\cdot 2)^k}{k} = \sum (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ $\to +\infty$

Oss $\displaystyle \sum \frac{(-1)^k}{2^k}$ converge assolutamente.