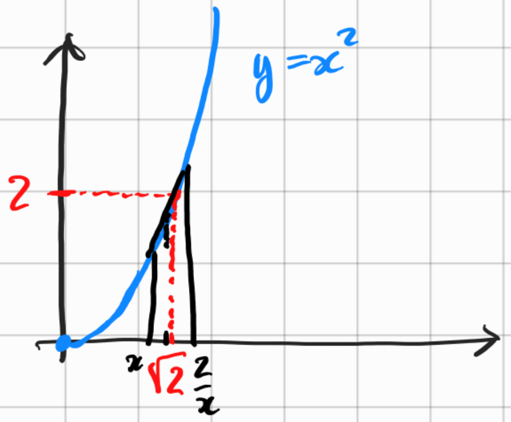
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 29 - 30.11.2022

SUCCESSIONI [RICORSIVE / DEFINITE PER RICORRENZA

SISTEMI DINAMICI DISCRETI

Algoritmo di ERONE

Problema: calcolare $\sqrt{p}$



$$\left[\; x=\sqrt{2} \qquad x^2=2 \qquad x\cdot x=2,\quad x=\frac{2}{x} \;\right]$$

Se a_n è vicino a $\sqrt{p}$

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \\ a_0 = p \end{cases}}$$

$$\left(\text{Se } a_n=\sqrt{p} \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{p}+\frac{p}{\sqrt{p}}}{2} = \sqrt{p} \right)$$

Domanda: $a_n \to \sqrt{p}$?

$$a_0 = p, \quad a_1 = \frac{p+1}{2}, \quad a_2 = \frac{\frac{p+1}{2} + \frac{2p}{p+1}}{2}, \ \ldots$$

In generale:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

$a_n \in \mathbb{R}$ scalare

Fibonacci: $F_0=0,\ F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

II ordine.

Successione definita per ricorrenza, del primo ordine, autonoma, non lineare.

$\hookrightarrow \left[a_{n+1} = \lambda \cdot a_n, \quad a_{n+1} = m a_n + q \right]$

lineari $\qquad f(x) = mx+q$

$\hookrightarrow$ [NON AUTONOMA : $a_{n+1} = f(a_n, n) = f_n(a_n)$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$]

[Non scalare: $z_{n+1} = z_n^2 + c$]

$a_{n+1} = f(a_n)$, $f(x) = \frac{x + \frac{p}{x}}{2}$

$\boxed{p > 1}$

Torniamo all'esempio: $\boxed{\begin{cases} a_0 = p \\ a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \end{cases}}$

[Se dimostro che a_n converge, $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, $\underline{\underline{\ell > 0}}$.

allora è banale dimostrare che $\ell = \sqrt{p}$. Infatti:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \longrightarrow \frac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2}$$

$$\ell = \frac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2} \iff 2\ell - \ell = \frac{p}{\ell}$$]

$\ell^2 = p \qquad \ell = \pm\sqrt{p}$.

Possiamo dire che a_n è decrescente? $\qquad a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \leq a_n \iff a_n^2 + p \leq 2a_n^2 \quad \otimes$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{a_n^2 \overset{?}{\geq} p}}$$

$a_0^2 \overset{?}{\geq} p \qquad p^2 \geq p$ sì se $p \geq 1$.

$a_n^2 \geq p \overset{?}{\Rightarrow} a_{n+1}^2 \geq p$

$$(a_{n+1})^2 = \left(\frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2}\right)^2 = \frac{a_n^2 + 2p + \frac{p^2}{a_n^2}}{4} \overset{?}{\geq} p$$

$$a_n^4 + 2p\,a_n^2 + p^2 \overset{?}{\geq} 4p\,a_n^2$$

$$a_n^4 - 2p\,a_n^2 + p^2 \overset{?}{\geq} 0 \qquad (a_n^2 - p)^2 \overset{!}{\geq} 0$$

$\forall n \quad a_n^2 \geq p \overset{(*)}{\Rightarrow} a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow a_n$ è decrescente

$a_n \to \ell. \qquad \ell \leq a_0 = p$

<u>Oss</u> Se $a_n > 0 \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} > 0$

$a_n \neq 0$ e la successione è <u>ben definita</u>

Inoltre $\ell \geq 0$, quindi a_n è convergente $(\ell \in \mathbb{R})$.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2} & \text{se } \ell > 0 \\ +\infty & \ell = 0 \end{cases}$$

$\ell \geq 0$

Se $\ell > 0 \quad \ell = \dfrac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2} \Rightarrow \ell^2 = p \Rightarrow \ell = \sqrt{p}$

Se $\ell = 0 \quad 0 = +\infty$ impossibile.

$\square$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

$\alpha = p$

$f(x) = \dfrac{x + \frac{p}{x}}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{p}{2x}$

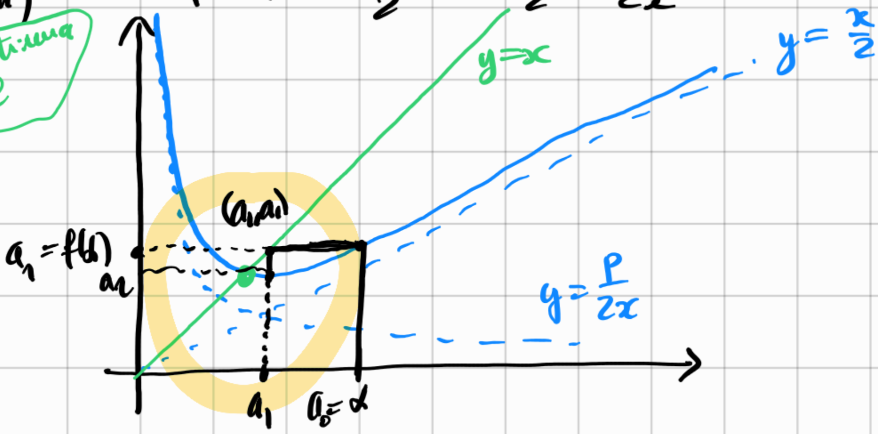
Se $a_n \to \ell$

se f è continua in ℓ

$a_{n+1} = f(a_n) \to f(\ell)$

$\downarrow$

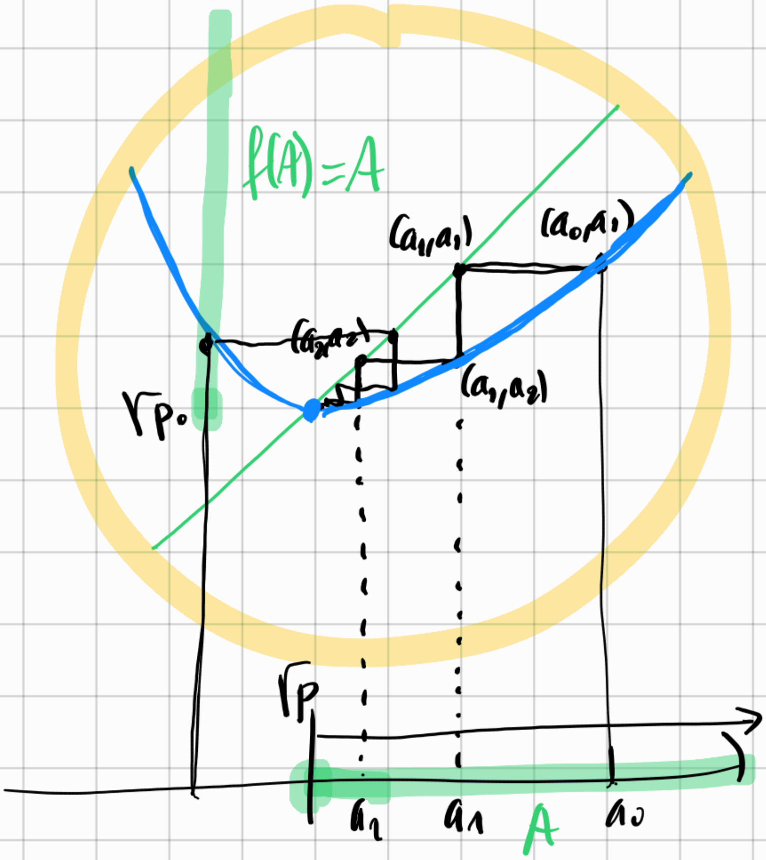
$\ell \qquad \ell = f(\ell)$



↳ equazione di <u>punto fisso</u> [<u>def</u> x è <u>punto fisso</u> per f se $f(x) = x$]

$a_0 = \alpha, \; a_1 = f(a_1), \; a_2 = f(a_1), \ldots$

$a_0 = \alpha, \; a_1 = f(\alpha), \; a_2 = f(f(\alpha)), \ldots, \; a_n = \underbrace{f(f(f \ldots f(\alpha) \ldots))}_{n \text{ volte}}$



[diagramma a ragnatela.]

$A = [\sqrt{p}, +\infty)$

$x \geq \sqrt{p} \Rightarrow f(x) \geq f(\sqrt{p}) = \sqrt{p}$

se f è crescente su A

$f(x) \leq x$

<u>Oss</u> $\quad a_{n+1} \leq a_n \quad \Leftrightarrow \quad f(a_n) \leq a_n$

$\quad\quad\quad (\geq) \quad\quad\quad\quad\quad\quad (\geq)$

<u>Def</u> Se $f: X \to Y$, $A \subseteq X$ si dice che

A è <u>invariante</u> per f se $f(A) \subseteq A$.

cioè $\quad x \in A \Rightarrow f(x) \in A$

<u>Oss</u> Se $a_{n+1} = f(a_n)$, se A è invariante e se $a_n \in A$

allora $a_N \in A \quad \forall N \geq n$.

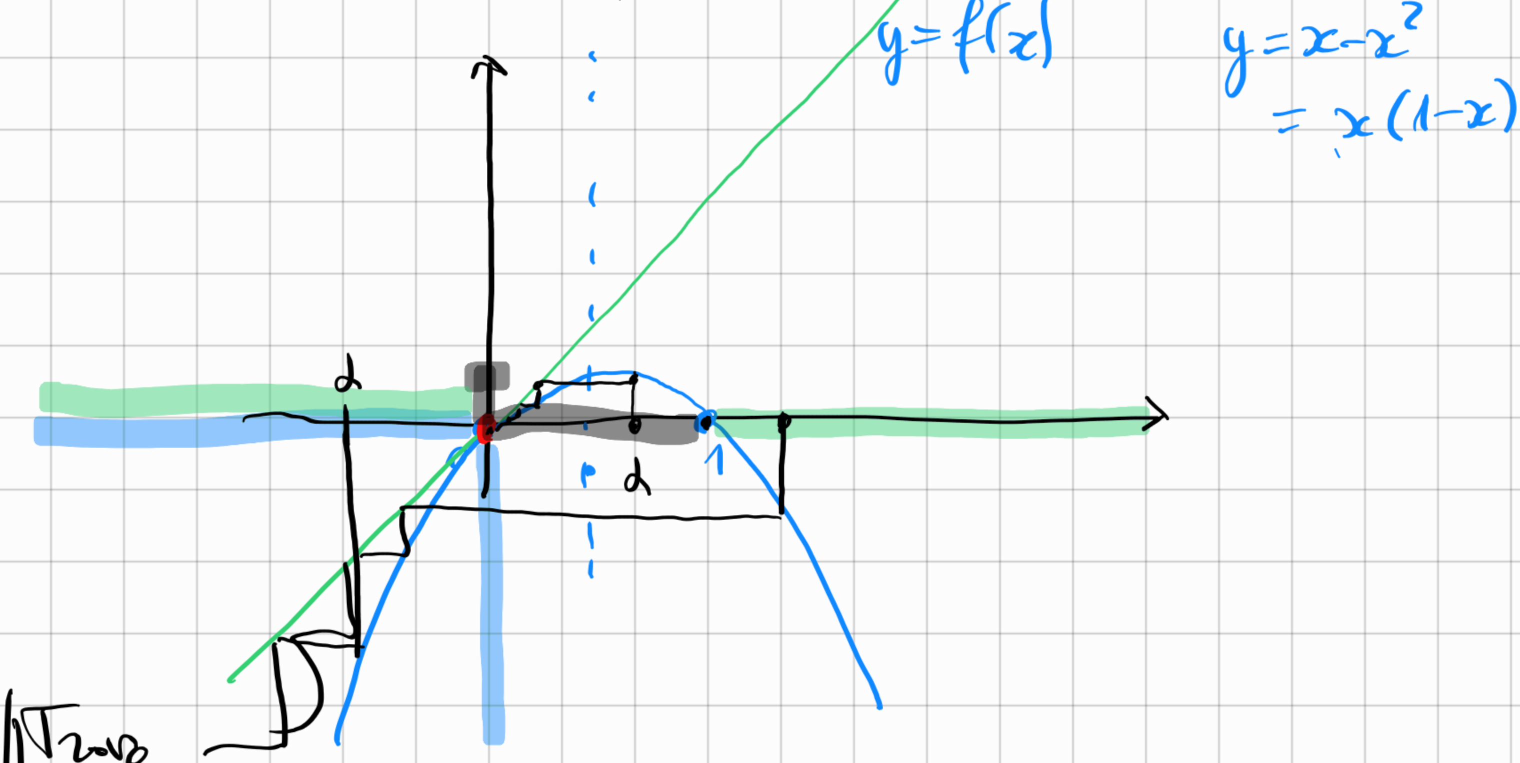
<u>Nell'esempio precedente</u> $A = [\sqrt{p}, +\infty)$ è invariante

per $f(x) = \dfrac{x + \frac{p}{x}}{2}$.

Esercizio Sia a_n la successione definita da:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases} \qquad f(x) = x - x^2 \qquad a_{n+1} = f(a_n)$$

Al variare di α dire se a_n ha limite e nel caso determinarlo.



Punti fissi: $f(x) = x$ $\qquad x - x^2 = x$

$x^2 = 0 \qquad \boxed{x = 0}$

$f(x) \leq x \quad \forall x.$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}$ è invariante

$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$

a_n è decrescente $\forall \alpha$.

Dal disegno sospetto che se $\alpha \in [0,1]$ $a_n \to 0$.

sospetto Se $\alpha \in (-\infty, 0)$ allora $a_n \to -\infty$, $a_n < 0$

" Se $\alpha \in (1, +\infty)$ allora $a_1 < 0$, $a_n \to -\infty$

dimostrazione

1. $I_1 = [0,1]$ è invariante

infatti $f(x)$ ha massimo nel vertice

$$f(x) \leq f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} < 1$$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$f([0,1]) = [0, \tfrac{1}{4}] \subseteq [0,1]$$

I_1 è invariante.

Se $\alpha \in I_1$ allora $a_n \in I_1$ $\forall n$.

a_n è decrescente $a_n \to \ell \in [0,1]$ perché $a_n \in [0,1]$

$\ell \in \mathbb{R}$ a_n è convergente

f è continua in ℓ $\Rightarrow$ $f(\ell) = \ell$

$\Rightarrow \ell$ è un punto fisso

$\Rightarrow \ell = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} a_{n+1} = f(a_n) \to f(\ell) \\ \downarrow \\ \ell \end{array} \right]$$

Dunque se $\alpha \in [0,1]$, $a_n \to 0$

2. $I_2 = (-\infty, 0)$, I_2 è invariante

$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ Se $\alpha < 0 \Rightarrow a_n < 0$ $\forall n$

a_n decrescente $a_n \to \ell$ a_n decrescente $\ell < a_0 = \alpha < 0$.

Se fosse $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell = 0$.

$\ell \in \{+\infty, -\infty\}$ a_n decrescente $\Rightarrow \ell = -\infty$

3. Se $\alpha > 1$, $\alpha \in I_3 = (1, +\infty)$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) < 0$$

$f(I_3) \subseteq I_2$. $\quad a_0 = \alpha \in I_3 \Rightarrow a_1 = f(\alpha) \in I_2$

invariante

$$a_n \in I_2 \quad \forall\, n \geq 1.$$

ci riconduciamo al caso 2: $\quad a_n \to -\infty$.