Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

17 dicembre 2022

1. (a) Al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$
(b) Al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^n}{(1+x)^n}.$$
(c) Al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+x^n}{(1-x)^n}.$$
(d) Al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^n}{(1-x)^n}.$$

Soluzione. Variante (a). Sia $a_n = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$. Per $x > 1$ il numeratore $1+x^n$ è asintoticamente equivalente a x^n dunque $a_n \sim \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ che tende a zero essendo $\frac{x}{x+1} < 1$ quando $x > 1$. Per $x = 1$ si ha $a_n = \frac{2}{2^n} \to 0$. Per $0 < x < 1$ si ha $1 + x^n \to 1$ e $(1 + x)^n \to +\infty$ quindi $a_n \to 0$. Per $x = 0$ si ha $a_n = 1 \to 1$. Per $-1 < x < 0$ si ha $1 + x^n \to 1$ e $(1 + x)^n \to 0^+$ dunque $a_n \to +\infty$. Per $x < -1$ si ha $1 + x^n \sim x^n$ e dunque $a_n \sim \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$. Ma $\frac{x}{1+x} = 1 + \frac{1}{-x-1} > 1$ e dunque $a_n \to +\infty$.

Variante (b). Sia $a_n = \frac{1-x^n}{(1+x)^n}$. Per $x > 1$ si ha $1 - x^n \sim -x^n$ e $(1 + x)^n \sim x^n$ dunque $a_n \to -1$. Per $x = 1$ si ha $a_n = 0 \to 0$. Per

$0 < x < 1$ si ha $1 - x^n \to 1$ e $(1+x)^n \to +\infty$ dunque $a_n \to 0$. Per $x = 0$ si ha $a_n = 1 \to 1$. Per $-1 < x < 0$ si ha $1 - x^n \to 1$ e $(1+x)^n \to 0^+$ dunque $a_n \to +\infty$. Per $x < -1$ si ha $1 - x^n \sim -x^n$ e dunque $a_n \sim -\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ dove $\frac{x}{1+x} = \frac{-x}{-x-1} > 1$ (per $x < -1$) e quindi $a_n \to -\infty$.

Variante (c). Sia $a_n = \frac{1+x^n}{(1-x)^n}$. Per $x > 1$ si ha $1 + x^n \sim x^n$ da cui $a_n \sim \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$. Ma $\frac{x}{1-x} = -\frac{x}{x-1} < -1$ e dunque a_n non ha limite. Per $0 < x < 1$ si ha $1+x^n \to 1$ e $(1-x)^n \to 0^+$ dunque $a_n \to +\infty$. Per $x = 0$ si ha $a_n = 1 \to 1$. Per $-1 < x < 0$ si ha $1 + x^n \to 1$ e $(1-x)^n \to +\infty$ dunque $a_n \to 0$. Per $x = -1$ si ha $0 < 1+x^n < 2$ mentre $(1-x)^n \to +\infty$ dunque $a_n \to 0$. Per $x < -1$ si ha $1+x^n \sim x^n$ e $(1-x)^n \sim -x^n$ dunque $a_n \sim \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$ che tende a 0 in quanto $\frac{x}{1-x} = \frac{-x}{-x+1} \in (0,1)$ se $x < -1$.

Variante (d). Sia $a_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^n}$. Per $x > 1$ si ha $1 - x^n \sim -x^n$ da cui $a_n \sim -(-1)^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^n$ che non ha limite (ma $|a_n| \to +\infty$). Per $0 < x < 1$ si ha $1 - x^n \to 1$ e $(1-x)^n \to 0^+$ dunque $a_n \to +\infty$. Per $x = 0$ si ha $a_n = 1 \to 1$. Per $-1 < x < 0$ si ha $1-x^n \to 1$ e $(1-x)^n \to +\infty$ dunque $a_n \to 0$. Per $x = -1$ si ha $0 \leq 1-x^n \leq 2$ mentre $(1-x)^n \to +\infty$ dunque $a_n \to 0$. Per $x < -1$ si ha $1 - x^n \sim -x^n$ da cui $a_n \sim -\left(\frac{x}{1-x}\right)^n \to 0$ in quanto $\frac{x}{1-x} = -\frac{-x}{-x+1} \in (-1,0)$ se $x < -1$. $\square$

2. (a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2+n} x^n.$$
Qual è la somma della serie quando $x = \frac{1}{2}$?

   (b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n^2+n} x^n.$$
Qual è la somma della serie quando $x = \frac{1}{3}$?

   (c) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+4}{n^2+n} x^n.$$
Qual è la somma della serie quando $x = \frac{1}{4}$?

(d) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+5}{n^2+n} x^n.$$

Qual è la somma della serie quando $x = \frac{1}{5}$?

Soluzione. Variante (a). Sia $a_n = \frac{n+2}{n^2+n} x^n$ il termine generico della serie. Essendo $n+2 \sim n$ e $n^2+n \sim n^2$ per $n \to \infty$, si ha

$$|a_n| \sim \frac{|x|^n}{n}$$

e quindi

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n}{n+1} \to |x| \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Per il criterio del rapporto se $|x| < 1$ deduciamo che la serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente e dunque è convergente. Se invece $|x| > 1$ il criterio del rapporto ci dice $|a_n| \to +\infty$ e quindi non può essere $a_n \to 0$ e la serie non è convergente. Studiamo a parte il caso $|x| = 1$. Se $x = 1$ si osserva che $a_n \sim \frac{1}{n}$ e visto che la serie $\sum \frac{1}{n}$ è divergente anche la serie data è divergente (possiamo applicare il criterio di confronto asintotico perché in questo caso la serie è a termini positivi). Se $x = -1$ si ha $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n^2+n}$. La serie è a segni alterni e possiamo applicare il criterio di Leibniz. Chiaramente $|a_n| \to 0$ perché $|a_n| \sim \frac{1}{n}$. Inoltre $|a_n| = \frac{n+2}{n^2+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n^2+n}$ è decrescente perché somma di successioni decrescenti. Dunque per il criterio di Leibniz la serie è convergente (anche se non assolutamente convergente). Abbiamo quindi mostrato che la serie converge se e solo se $-1 \leq x < 1$.

Nel caso $x = \frac{1}{2}$ si ha

$$a_n = \frac{n+2}{(n^2+n) \cdot 2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} = b_n - b_{n+1}$$

con $b_n = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}$. Dunque

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{n=2}^{N+1} b_n = b_1 - b_{N+1} \to b_1 = 1$$

per $N \to +\infty$. La serie data ha quindi somma 1.

Le altre varianti hanno uno svolgimento sostanzialmente identico. Le risposte sono le stesse. □

3. (a) Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \frac{3a_n+8}{a_n+1}. \end{cases}$$

   i. per $\alpha = 0$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;
   ii. fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{5}{2}$;
   iii. se a_n è la successione definita nel caso $\alpha = 0$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 4}{a_n + 1}.$$

(b) Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \frac{2a_n+9}{a_n+2}. \end{cases}$$

   i. per $\alpha = 0$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;
   ii. fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{7}{2}$;
   iii. se a_n è la successione definita nel caso $\alpha = 0$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 3}{a_n + 1}.$$

(c) Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \frac{a_n+8}{a_n+3}. \end{cases}$$

   i. per $\alpha = 0$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;
   ii. fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{9}{2}$;
   iii. se a_n è la successione definita nel caso $\alpha = 0$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 2}{a_n + 1}.$$

(d) Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \frac{5a_n}{a_n - 1}. \end{cases}$$

i. per $\alpha = 2$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;

ii. fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{1}{2}$;

iii. se a_n è la successione definita nel caso $\alpha = 2$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 6}{a_n + 1}.$$

Svolgimento 3(a). Calcoliamo il valore dei primi termini della successione

$a_1 = \alpha = 0$; $a_2 = 8$; $a_3 = \frac{32}{9} = 3,55$; $a_4 = \frac{163}{41} = 4,09$; $a_5 = \frac{832}{209} = 3,81$.

Si noti come i valori dei termini con indice dispari siano crescenti mentre quelli pari decrescono. Procediamo per induzione per provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale scopo consideriamo la funzione associata alla legge ricorsiva che definisce la successione, ovvero

$$f(x) = \frac{3x+8}{x+1} = 3 + \frac{5}{x+1}$$

Si vede facilmente che f é monotona decrescente. Mentre

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{3\frac{3x+8}{x+1} + 8}{\frac{3x+8}{x+1} + 1} = \frac{17x+32}{4x+9}$$

risulta monotona crescente. Infatti, tenendo presente che stiamo considerando i valori di x tali che $x + 1 > 0$, abbiamo che

$$g(x_1) = \frac{17x_1+32}{4x_1+9} < \frac{17x_2+32}{4x_2+9} = g(x_2) \iff 25x_1 < 25x_2 \iff x_1 < x_2.$$

Consideriamo quindi le sottosuccessioni con indici pari $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e con indici dispari $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ciascun termine delle due successioni si ottiene dal precedente mediante le relazioni

$$a_{2n+2} = g(a_{2n}); \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}).$$

Di conseguenza, tenuto conto del fatto che g, essendo monotona, conserva l'ordine, possiamo provare che la successione dei pari é monotona decrescente e quella dei dispari é crescente procedendo per induzione.

$$\begin{cases} a_2 > a_4 \\ a_{2n-2} > a_{2n} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > a_{2n+2} = g(a_{2n}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 < a_3 \\ a_{2n-1} < a_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < a_{2n+3} = g(a_{2n+1}). \end{cases}$$

La successione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata inferiormente perché é sempre positiva. Infatti per induzione:

$$\begin{cases} a_2 > 0 \\ a_{2n-2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > g(0) = \frac{32}{9} > 0. \end{cases}$$

Mentre la successione $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata superiormente perché

$$\begin{cases} a_1 < 4 \\ a_{2n-1} < 4 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < g(4) = 4. \end{cases}$$

Per il teorema sui limiti delle successioni monotone, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = L_p, \quad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L_d.$$

Poiché la funzione g é continua e $a_{2n+2} = g(a_{2n})$, passando al limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+2} = L_p = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n}) = g(L_p).$$

Da cui risolvendo l'equazione $L_p = g(L_p)$, otteniamo $L_p = 4$. Analogamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = L_d = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n+1}) = g(L_d).$$

Risolvendo l'equazione $L_d = g(L_d)$, otteniamo ovviamente $L_d = 4$. Dato che l'unione della successione degli indici dispari e degli indici pari ricopre $\mathbb{N}$ e $L_p = L_d = 4$ possiamo dedurre, per un noto teorema sui limiti, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4.$$

$\square$

Svolgimento 3(b). Calcoliamo il valore dei primi termini della successione

$a_1 = \alpha = -\frac{5}{2}$; $a_2 = -\frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{21}{2} = 10,5$; $a_4 = \frac{79}{23} = 3,31$; $a_5 = \frac{421}{102} = 4,1$; $a_6 = \frac{2079}{523} = 3,81$.

Si noti che, per $n \geq 3$, i valori dei termini con indice pari siano crescenti mentre quelli dispari decrescono. Procedendo per induzione, esattamente come nel caso precedente 3(a), si puo' provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si giunge quindi alla medesima conclusione in merito al limite della successione, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4.$$

$\square$

Svolgimento 3(c). Da quanto osservato nella risoluzione del punto 3(a), dove si assume $a_1 = \alpha = 0$, risulta che i termini con indice pari sono decrescenti e maggiori di 4, mentre quelli dispari crescenti e minori di 4. Di conseguenza la serie risulta essere a termini di segno alterno. Possiamo procedere in due modi: applicare il criterio della convergenza assoluta oppure quello di Leibniz.

Criterio della convergenza assoluta.

Il criterio afferma che la serie data converge se converge la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 4}{a_n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Questa é una serie a termini di segno costante, $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi posso applicare il criterio del rapporto calcolando il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{a_{n+1}-4}{a_{n+1}+1}\right|}{\left|\frac{a_n-4}{a_n+1}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{3a_n+8}{a_n+1}-4\right|}{\frac{3a_n+8}{a_n+1}+1}\,\frac{a_n+1}{|a_n-4|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|3a_n+8-a_n-4|(a_n+}{(3a_n+8+a_n+1)|a_n-}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(a_n+1)}{(4a_n+9)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Dato che il valore del limite risulta minore di uno, la serie dei valori assoluti converge e quindi anche la serie data é convergente.

□

Criterio di Leibniz. Nel punto 3(a) abbiamo provato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta: $a_{2n} > 4$, quindi $a_{2n} - 4 > 0$, $a_{2n+1} < 4$, quindi $a_{2n+1} - 4 < 0$. La serie data puó essere scritta come segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-4}{a_n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left|\frac{a_n-4}{a_n+1}\right|.$$

La convergenza seguirá verificando che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Leibniz. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n-4}{a_n+1}\right| = 0$$

Mentre

$$\left|\frac{a_n-4}{a_n+1}\right| > \left|\frac{a_{n+1}-4}{a_{n+1}+1}\right|.$$

Perché

$$\left|\frac{a_n-4}{a_n+1}\right| > \left|\frac{a_{n+1}-4}{a_{n+1}+1}\right| = \frac{\left|\frac{3a_n+8}{a_n+1}-4\right|}{\frac{3a_n+8}{a_n+1}+1} = \frac{|a_n-4|}{4a_n+9} \quad\Longleftrightarrow\quad 4a_n+9 > a_n+1 \quad\Longleftrightarrow\quad 3a_n+8$$

L'ultima diseguaglianza é vera perché, da quanto visto sopra $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Altro metodo. Svolgimento 3(a). Iniziamo calcolando il punto fisso della funzione associata alla relazione ricorsiva che definisce la successione data:

$$f(x) = \frac{3x+8}{x+1} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x+8 = x^2+x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-2x-8=0$$

Le soluzioni sono $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 0$, $x_2 = -2$ non potrá essere il limite della successione. Il calcolo dei primi termini della successione,

$a_1 = \alpha = 0$; $a_2 = 8$; $a_3 = \frac{32}{9} = 3,55$; $a_4 = \frac{163}{41} = 4,09$; $a_5 = \frac{832}{209} = 3,81$, ci spinge ad ipotizzare che il limite sia $x_1 = 4$. Quindi

$$|a_{n+1} - 4| = \left| \frac{3a_n + 8}{a_n + 1} - 4 \right| = \frac{|a_n - 4|}{a_n + 1}$$

Per valutare il secondo membro della disequazione osserviamo che per $n = 2, 3, 4, 5$ risultano maggiori di 2. Verifichiamo che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti segue dalla osservazione che per ogni $n > 1$ risulta $a_n > 0$ e dalle maggiorazioni seguenti

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 8}{a_n + 1} > 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3a_n + 8 > 2a_n + 2,$$

da cui $a_n + 1 > 3$. Ovvero

$$|a_{n+1} - 4| = \frac{|a_n - 4|}{a_n + 1} < \frac{|a_n - 4|}{3}$$

Iterando il procedimento

$$|a_{n+1} - 4| = \frac{|a_n - 4|}{a_n + 1} < \frac{|a_n - 4|}{3} < \quad \cdots \quad < \frac{|a_2 - 4|}{3^{n-1}} = \frac{4}{3^{n-1}}. \qquad (1)$$

Passando al limite abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 4.$$

□

Svolgimento 3(b). Si procede come nel caso precedente, osservando peró che $a_n > 2$ per $n \geq 3$. □

Svolgimento 3(c).] Svolgimento 3(c).

Applichiamo il criterio della convergenza assoluta considerando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 4}{a_n + 1} \right|.$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie applichiamo il criterio del confronto utilizzando la maggiorazione (1) e le considerazioni che la precedono:

$$\frac{|a_n - 4|}{a_n + 1} = \frac{|a_{n-1} - 4|}{(a_{n-1} + 1)^2} < \frac{|a_n - 4|}{3^2} < \cdots < \frac{|a_2 - 4|}{3^n} = \frac{4}{3^n}.$$

La serie dei valori assoluti converge perché é maggiorata con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, che é convergente.

□

Risoluzione dell'esercizio N. 3 - Fila 2. 3. Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + 9}{a_n + 2}. \end{cases}$$

(a) per $\alpha = 0$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;

(b) fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{7}{2}$;

(c) se a_n é la successione definita nel caso $\alpha = 0$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 3}{a_n + 1}.$$

Svolgimento 3(a)

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione

$a_1 = \alpha = 0$; $a_2 = \frac{9}{2} = 4,5$; $a_3 = \frac{36}{13} = 2,76$; $a_4 = \frac{189}{62} = 3,048$.

Si noti come i valori dei termini con indice dispari siano crescenti mentre quelli pari decrescono. Procediamo per induzione per provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale scopo consideriamo la funzione associata alla legge ricorsiva che definisce la successione, ovvero

$$f(x) = \frac{2x+9}{x+2} = 2 + \frac{5}{x+2}$$

Si vede facilmente che f é monotona decrescente. Mentre

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{2\frac{2x+9}{x+2} + 9}{\frac{2x+9}{x+2} + 2} = \frac{13x+36}{4x+13}$$

risulta monotona crescente. Infatti, tenendo presente che stiamo considerando i valori di x tali che $x > 0$, abbiamo che

$$g(x_1) = \frac{13x_1+36}{4x_1+13} < \frac{13x_2+36}{4x_2+13} = g(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad 25x_1 < 25x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < x_2.$$

Consideriamo quindi le sottosuccessioni con indici pari $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e con indici dispari $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ciascun termine delle due successioni si ottiene dal precedente mediante le relazioni

$$a_{2n+2} = g(a_{2n}); \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}).$$

Di conseguenza, tenuto conto del fatto che g, essendo monotona, conserva l'ordine, possiamo provare che la successione dei pari é monotona decrescente e quella dei dispari é crescente procedendo per induzione.

$$\begin{cases} a_2 > a_4 \\ \\ a_{2n-2} > a_{2n} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > a_{2n+2} = g(a_{2n}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 < a_3 \\ \\ a_{2n-1} < a_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < a_{2n+3} = g(a_{2n+1}). \end{cases}$$

La successione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata inferiormente perché é sempre positiva. Infatti per induzione:

$$\begin{cases} a_2 > 0 \\ \\ a_{2n-2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > g(0) = \frac{36}{13} > 0. \end{cases}$$

Mentre la successione $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata superiormente perché

$$\begin{cases} a_1 < 3 \\ \\ a_{2n-1} < 3 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < g(3) = 3. \end{cases}$$

Per il teorema sui limiti delle successioni monotone, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = L_p, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L_d.$$

Poiché la funzione g é continua e $a_{2n+2} = g(a_{2n})$, passando al limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+2} = L_p = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n}) = g(L_p).$$

Da cui risolvendo l'equazione $L_p = g(L_p)$, otteniamo $L_p = 3$. Analogamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = L_d = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n+1}) = g(L_d).$$

Risolvendo l'equazione $L_d = g(L_d)$, otteniamo ovviamente $L_d = 3$. Dato che l'unione della successione degli indici dispari e degli indici pari ricopre $\mathbb{N}$ e $L_p = L_d = 3$ possiamo dedurre, per un noto teorema sui limiti, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 3.$$

Svolgimento 3(b)

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione
$a_1 = \alpha = -\frac{7}{2}$; $a_2 = -\frac{4}{3}$; $a_3 = \frac{19}{2} = 9,5 > a_5$; $a_4 = \frac{56}{23} < a_6$.
Si noti che, per $n \geq 3$, i valori dei termini con indice pari siano crescenti mentre quelli dispari decrescono. Procedendo per induzione, esattamente come nel caso precedente 3(a), si puo' provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si giunge quindi alla medesima conclusione in merito al limite della successione, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 3.$$

Svolgimento 3(c)

Da quanto osservato nella risoluzione del punto 3(a), dove si assume $a_1 = \alpha = 0$, risulta che i termini con indice pari sono decrescenti e maggiori di 3, mentre quelli dispari crescenti e minori di 3. Di conseguenza la serie risulta essere a termini di segno alterno. Possiamo procedere in due modi: applicare il criterio della convergenza assoluta oppure quello di Leibniz.

Criterio della convergenza assoluta.

Il criterio afferma che la serie data converge se converge la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Questa é una serie a termini di segno costante, $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi posso applicare il criterio del rapporto calcolando il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1} \right|}{\left| \frac{a_n-3}{a_n+1} \right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{2a_n+9}{a_n+2} - 3 \right|}{\frac{2a_n+9}{a_n+2} + 1} \frac{a_n + 1}{|a_n - 3|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|2a_n + 9 - 3a_n - 6|(a_n +}{(2a_n + 9 + a_n + 2)|a_n -}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(a_n + 1)}{(3a_n + 11)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Dato che il valore del limite risulta minore di uno, la serie dei valori assoluti converge e quindi anche la serie data é convergente.

Criterio di Leibniz.

Nel punto 3(a) abbiamo provato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta: $a_{2n} > 3$, quindi $a_{2n} - 3 > 0$, $a_{2n+1} < 3$, quindi $a_{2n+1} - 3 < 0$. La serie data puó essere scritta come segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 3}{a_n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left| \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \right|.$$

La convergenza seguirá verificando che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Leibniz. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 3 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n - 3}{a_n + 1}\right| = 0$$

Mentre

$$\left|\frac{a_n - 3}{a_n + 1}\right| > \left|\frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1}\right|.$$

Perché

$$\left|\frac{a_n - 3}{a_n + 1}\right| > \left|\frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1}\right| = \frac{\left|\frac{2a_n+9}{a_n+2} - 3\right|}{\frac{2a_n+9}{a_n+2} + 1} = \frac{|a_n - 3|}{3a_n + 11} \quad \Longleftrightarrow \quad 3a_n + 11 > a_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a_n$$

Altro metodo. Svolgimento 3(a)

Iniziamo calcolando il punto fisso della funzione associata alla relazione ricorsiva che definisce la successione data:

$$f(x) = \frac{2x + 9}{x + 2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + 9 = x^2 + 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0$$

Le soluzioni sono $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Dato che per ogni $n > 1$ risulta $a_n > 0$, $x_2 = -3$ non potrá essere il limite della successione.

Il calcolo dei primi termini della successione,

$a_1 = \alpha = 0$; $a_2 = \frac{9}{2} = 4,5$; $a_3 = \frac{36}{13} = 2,76$; $a_4 = \frac{189}{62} = 3,048$, ci spinge ad ipotizzare che il limite sia $x_1 = 3$. Quindi

$$|a_{n+1} - 3| = \left|\frac{2a_n + 9}{a_n + 2} - 3\right| = \frac{|a_n - 3|}{a_n + 2}$$

Per valutare il secondo membro della disequazione osserviamo che per $n = 2$, 3, 4, i termini della successione risultano maggiori di 1. Verifichiamo che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti segue dalla osservazione che per ogni $n > 1$ risulta $a_n > 0$ e dalle maggiorazioni seguenti

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 9}{a_n + 2} > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a_n + 9 > 2a_n + 4,$$

da cui $a_n + 2 > 3$. Ovvero

$$|a_{n+1} - 3| = \frac{|a_n - 3|}{a_n + 2} < \frac{|a_n - 3|}{3}$$

Iterando il procedimento

$$|a_{n+1} - 3| = \frac{|a_n - 3|}{a_n + 2} < \frac{|a_n - 3|}{3} < \quad \cdots \quad < \frac{|a_2 - 3|}{3^{n-1}} = \frac{3}{2 \ \cdot \ 3^{n-1}}. \qquad (2)$$

Passando al limite abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 3.$$

Svolgimento 3(b).

Si procede come nel caso precedente, osservando peró che $a_n > 2$ per $n \geq 3$.

Svolgimento 3(c).

Applichiamo il criterio della convergenza assoluta considerando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \right|.$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie applichiamo il criterio del confronto utilizzando la maggiorazione (3) e le considerazioni che la precedono:

$$\frac{|a_n - 3|}{a_n + 1} = \frac{|a_{n-1} - 3|}{(a_{n-1} + 2)(a_n + 1)} < \frac{|a_n - 3|}{3^2} < \quad \cdots \quad < \frac{|a_2 - 3|}{3^n} = \frac{3}{2 \ \cdot \ 3^n}.$$

La serie dei valori assoluti converge perché é maggiorata con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, che é convergente.

Risoluzione dell'esercizio N. 3 - Fila 3

3. Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ \\ a_{n+1} = \frac{a_n+8}{a_n+3}. \end{cases}$$

(a) per $\alpha = 0$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;

(b) fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{9}{2}$;

(c) se a_n é la successione definita nel caso $\alpha = 0$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 2}{a_n + 1}.$$

Svolgimento 3(a)

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione

$a_1 = \alpha = 0$; $a_2 = \frac{8}{3} = 2,7$; $a_3 = \frac{32}{17} = 1,9$; $a_4 = \frac{168}{83} = 2,02$; $a_5 = \frac{832}{417} = 1,99$.

Si noti come i valori dei termini con indice dispari siano crescenti mentre quelli pari decrescono. Procediamo per induzione per provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale scopo consideriamo la funzione associata alla legge ricorsiva che definisce la successione, ovvero

$$f(x) = \frac{x+8}{x+3} = 1 + \frac{5}{x+3}$$

Si vede facilmente che f é monotona decrescente. Mentre

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x+8}{x+3} + 8}{\frac{x+8}{x+3} + 3} = \frac{9x+32}{4x+17}$$

risulta monotona crescente. Infatti, tenendo presente che stiamo considerando i valori di x tali che $x > 0$, abbiamo che

$$g(x_1) = \frac{9x_1 + 32}{4x_1 + 17} < \frac{9x_2 + 32}{4x_2 + 17} = g(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad 25x_1 < 25x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < x_2.$$

Consideriamo quindi le sottosuccessioni con indici pari $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e con indici dispari $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ciascun termine delle due successioni si ottiene dal precedente mediante le relazioni

$$a_{2n+2} = g(a_{2n}); \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}).$$

Di conseguenza, tenuto conto del fatto che g, essendo monotona, conserva l'ordine, possiamo provare che la successione dei pari é monotona decrescente e quella dei dispari é crescente procedendo per induzione.

$$\begin{cases} a_2 > a_4 \\ \\ a_{2n-2} > a_{2n} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > a_{2n+2} = g(a_{2n}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 < a_3 \\ \\ a_{2n-1} < a_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < a_{2n+3} = g(a_{2n+1}). \end{cases}$$

La successione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata inferiormente perché é sempre positiva. Infatti per induzione:

$$\begin{cases} a_2 > 0 \\ \\ a_{2n-2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > g(0) = \frac{32}{17} > 0. \end{cases}$$

Mentre la successione $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata superiormente perché

$$\begin{cases} a_1 < 2 \\ \\ a_{2n-1} < 2 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < g(2) = 2. \end{cases}$$

Per il teorema sui limiti delle successioni monotone, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = L_p, \quad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L_d.$$

Poiché la funzione g é continua e $a_{2n+2} = g(a_{2n})$, passando al limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+2} = L_p = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n}) = g(L_p).$$

Da cui risolvendo l'equazione $L_p = g(L_p)$, otteniamo $L_p = 2$. Analogamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = L_d = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n+1}) = g(L_d).$$

Risolvendo l'equazione $L_d = g(L_d)$, otteniamo ovviamente $L_d = 2$. Dato che l'unione della successione degli indici dispari e degli indici pari ricopre $\mathbb{N}$ e $L_p = L_d = 2$ possiamo dedurre, per un noto teorema sui limiti, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2.$$

Svolgimento 3(b)

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione
$a_1 = \alpha = -\frac{9}{2}$; $a_2 = -\frac{7}{3}$; $a_3 = \frac{17}{2} = 8,5 > a_5 = \frac{217}{102}$; $a_4 = \frac{33}{23} < a_6 = \frac{1033}{523}$.
Si noti che, per $n \geq 3$, i valori dei termini con indice pari siano crescenti mentre quelli dispari decrescono. Procedendo per induzione, esattamente come nel caso precedente 3(a), si puo' provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si giunge quindi alla medesima conclusione in merito al limite della successione, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2.$$

Svolgimento 3(c)

Da quanto osservato nella risoluzione del punto 3(a), dove si assume $a_1 = \alpha = 0$, risulta che i termini con indice pari sono decrescenti e maggiori di 2, mentre quelli dispari crescenti e minori di 2. Di conseguenza la serie risulta essere a termini di segno alterno. Possiamo procedere in due modi: applicare il criterio della convergenza assoluta oppure quello di Leibniz.

Criterio della convergenza assoluta.

Il criterio afferma che la serie data converge se converge la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Questa é una serie a termini di segno costante, $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi posso applicare il criterio del rapporto calcolando il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1} \right|}{\left| \frac{a_n-2}{a_n+1} \right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{a_n+8}{a_n+3} - 2 \right|}{\frac{a_n+8}{a_n+3} + 1} \frac{a_n + 1}{|a_n - 2|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n + 8 - 2a_n - 6|(a_n + 1}{(a_n + 8 + a_n + 3)|a_n - 2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(a_n + 1)}{(2a_n + 11)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Dato che il valore del limite risulta minore di uno, la serie dei valori assoluti converge e quindi anche la serie data é convergente.

Criterio di Leibniz.

Nel punto 3(a) abbiamo provato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta: $a_{2n} > 2$, quindi $a_{2n} - 2 > 0$, $a_{2n+1} < 2$, quindi $a_{2n+1} - 2 < 0$. La serie data puó essere scritta come segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 2}{a_n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left| \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \right|.$$

La convergenza seguirá verificando che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Leibniz. Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \right| = 0$$

Mentre

$$\left| \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \right| > \left| \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 1} \right|.$$

Perché

$$\left| \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \right| > \left| \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 1} \right| = \frac{\left| \frac{a_n+8}{a_n+3} - 2 \right|}{\frac{a_n+8}{a_n+3} + 1} = \frac{|a_n - 2|}{2a_n + 11} \quad \Longleftrightarrow \quad 2a_n+11 > a_n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n+$$

Altro metodo. Svolgimento 3(a)

Iniziamo calcolando il punto fisso della funzione associata alla relazione ricorsiva che definisce la successione data:

$$f(x) = \frac{x+8}{x+3} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x+8 = x^2+3x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+2x-8=0$$

Le soluzioni sono $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Dato che per ogni $n > 1$ risulta $a_n > 0$, $x_2 = -4$ non potrá essere il limite della successione.

Il calcolo dei primi termini della successione,

$a_1 = \alpha = 0$; $a_2 = \frac{8}{3} = 2,7$; $a_3 = \frac{32}{17} = 1,9$; $a_4 = \frac{168}{83} = 2,02$; $a_5 = \frac{832}{417} = 1,99$, ci spinge ad ipotizzare che il limite sia $x_1 = 2$. Quindi

$$|a_{n+1} - 2| = \left| \frac{a_n + 8}{a_n + 3} - 2 \right| = \frac{|a_n - 2|}{a_n + 3}$$

Per valutare il secondo membro della disequazione osserviamo che per $n = 2, 3, 4$, i termini della successione risultano maggiori di 1. Verifichiamo che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti segue dalla osservazione che per ogni $n > 1$ risulta $a_n > 0$ e quindi

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 8}{a_n + 3} > 1,$$

da cui $a_n + 3 > a_n + 1 > 2$. Ovvero

$$|a_{n+1} - 2| = \frac{|a_n - 2|}{a_n + 3} < \frac{|a_n - 2|}{2}$$

Iterando il procedimento

$$|a_{n+1} - 2| = \frac{|a_n - 2|}{a_n + 3} < \frac{|a_n - 2|}{2} < \quad \cdots \quad < \frac{|a_2 - 2|}{2^{n-1}} = \frac{2}{3 \cdot 2^{n-1}}. \qquad (3)$$

Passando al limite abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2.$$

Svolgimento 3(b).

Si procede come nel caso precedente, osservando peró che $a_n > 1$ per $n \geq 3$.

Svolgimento 3(c).

Applichiamo il criterio della convergenza assoluta considerando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 2}{a_n + 1} \right| .$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie applichiamo il criterio del confronto utilizzando la maggiorazione (3) e le considerazioni che la precedono:

$$\frac{|a_n - 2|}{a_n + 1} = \frac{|a_{n-1} - 2|}{(a_{n-1} + 1)(a_{n-1} + 3)} < \frac{|a_{n-1} - 2|}{2^2} < \; \cdots \; < \frac{|a_2 - 2|}{2^n} = \frac{2}{3 \, \cdot \, 2^n}.$$

La serie dei valori assoluti converge perché é maggiorata con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, che é convergente.

Risoluzione dell'esercizio N. 3 - Fila 4

3. Si consideri la successione a_n definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ \\ a_{n+1} = \frac{5a_n}{a_n - 1}. \end{cases}$$

(a) per $\alpha = 2$ determinare se la successione ha limite e nel caso calcolarlo;

(b) fare lo stesso nel caso $\alpha = -\frac{1}{2}$;

(c) se a_n é la successione definita nel caso $\alpha = 2$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 6}{a_n + 1}.$$

Svolgimento 3(a)

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione
$a_1 = \alpha = 2$; $a_2 = 10$; $a_3 = \frac{50}{9} = 5,55$; $a_4 = \frac{250}{41} = 6,09$; $a_5 = \frac{1250}{209} = 5,9$.
Si noti come i valori dei termini con indice dispari siano crescenti mentre quelli pari decrescono. Procediamo per induzione per provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale scopo consideriamo la funzione associata alla legge ricorsiva che definisce la successione, ovvero

$$f(x) = \frac{5x}{x-1} = 5 + \frac{5}{x-1}$$

Si vede facilmente che f é monotona decrescente. Mentre

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{5\frac{5x}{x-1}}{\frac{5x}{x-1} - 1} = \frac{25x}{4x+1}$$

risulta monotona crescente. Infatti, tenendo presente che stiamo considerando i valori di x tali che $x > 0$, abbiamo che

$$g(x_1) = \frac{25x_1}{4x_1+1} < \frac{25x_2}{4x_2+1} = g(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad 25x_1 < 25x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < x_2.$$

Consideriamo quindi le sottosuccessioni con indici pari $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e con indici dispari $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ciascun termine delle due successioni si ottiene dal precedente mediante le relazioni

$$a_{2n+2} = g(a_{2n}); \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}).$$

Di conseguenza, tenuto conto del fatto che g, essendo monotona, conserva l'ordine, possiamo provare che la successione dei pari é monotona decrescente e quella dei dispari é crescente procedendo per induzione.

$$\begin{cases} a_2 > a_4 \\ \\ a_{2n-2} > a_{2n} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > a_{2n+2} = g(a_{2n}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 < a_3 \\ \\ a_{2n-1} < a_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < a_{2n+3} = g(a_{2n+1}). \end{cases}$$

La successione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata inferiormente perché é sempre positiva. Infatti per induzione:

$$\begin{cases} a_2 > 0 \\ \\ a_{2n-2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n} = g(a_{2n-2}) > g(0) = 0. \end{cases}$$

Mentre la successione $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata superiormente perché

$$\begin{cases} a_1 < 6 \\ \\ a_{2n-1} < 6 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n+1} = g(a_{2n-1}) < g(6) = 6. \end{cases}$$

Per il teorema sui limiti delle successioni monotone, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = L_p, \quad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L_d.$$

Poiché la funzione g é continua e $a_{2n+2} = g(a_{2n})$, passando al limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+2} = L_p = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n}) = g(L_p).$$

Da cui risolvendo l'equazione $L_p = g(L_p)$, otteniamo $L_p = 6$. Analogamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = L_d = \lim_{n\to+\infty} g(a_{2n+1}) = g(L_d).$$

Risolvendo l'equazione $L_d = g(L_d)$, otteniamo ovviamente $L_d = 6$. Dato che l'unione della successione degli indici dispari e degli indici pari ricopre $\mathbb{N}$ e $L_p = L_d = 6$ possiamo dedurre, per un noto teorema sui limiti, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 6.$$

Svolgimento 3(b)

Calcoliamo il valore dei primi termini della successione
$a_1 = \alpha = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{5}{3}$; $a_3 = \frac{25}{2}$; $a_4 = \frac{125}{23} > a_2$; $a_5 = \frac{625}{102} < a_3$.
Si noti che, per $n \geq 2$, i valori dei termini con indice pari siano crescenti mentre quelli dispari decrescono. Procedendo per induzione, esattamente come nel caso precedente 3(a), si puo' provare che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si giunge quindi alla medesima conclusione in merito al limite della successione, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 6.$$

Svolgimento 3(c)

Da quanto osservato nella risoluzione del punto 3(a), dove si assume $a_1 = \alpha = 0$, risulta che i termini con indice pari sono decrescenti e maggiori di 6, mentre quelli dispari crescenti e minori di 6. Di conseguenza la serie risulta essere a termini di segno alterno. Possiamo procedere in due modi: applicare il criterio della convergenza assoluta oppure quello di Leibniz.

Criterio della convergenza assoluta.

Il criterio afferma che la serie data converge se converge la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 6}{a_n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Questa é una serie a termini di segno costante, $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi posso applicare il criterio del rapporto calcolando il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{a_{n+1}-6}{a_{n+1}+1}\right|}{\left|\frac{a_n-6}{a_n+1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{5a_n}{a_n-1} - 6\right|}{\frac{5a_n}{a_n-1} + 1} \frac{a_n + 1}{|a_n - 6|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|5a_n - 6a_n + 6|(a_n + 1)}{(5a_n + a_n - 1)|a_n - 6|} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n + 1)}{(6a_n - 1)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Dato che il valore del limite risulta minore di uno, la serie dei valori assoluti converge e quindi anche la serie data é convergente.

Criterio di Leibniz.

Nel punto 3(a) abbiamo provato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta: $a_{2n} > 6$, quindi $a_{2n} - 6 > 0$, $a_{2n+1} < 6$, quindi $a_{2n+1} - 6 < 0$. La serie data puó essere scritta come segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - 6}{a_n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left|\frac{a_n - 6}{a_n + 1}\right|.$$

La convergenza seguirá verificando che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Leibniz. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 6 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n - 6}{a_n + 1}\right| = 0$$

Mentre

$$\left|\frac{a_n - 6}{a_n + 1}\right| > \left|\frac{a_{n+1} - 6}{a_{n+1} + 1}\right|.$$

Perché

$$\left|\frac{a_n - 6}{a_n + 1}\right| > \left|\frac{a_{n+1} - 6}{a_{n+1} + 1}\right| = \frac{\left|\frac{5a_n}{a_n-1} - 6\right|}{\frac{5a_n}{a_n-1} + 1} = \frac{|a_n - 6|}{6a_n - 1} \quad \Longleftrightarrow \quad 6a_n - 1 > a_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > \frac{2}{5}$$

Altro metodo. Svolgimento 3(a)

Iniziamo calcolando il punto fisso della funzione associata alla relazione ricorsiva che definisce la successione data:

$$f(x) = \frac{5x}{x-1} = x \quad \Longleftrightarrow \quad 5x = x^2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 6x = 0$$

Le soluzioni sono $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. Dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq 2$, $x_2 = 0$ non potrá essere il limite della successione.

Il calcolo dei primi termini della successione,

$a_1 = \alpha = 2$; $a_2 = 10$; $a_3 = \frac{50}{9} = 5,55$; $a_4 = \frac{250}{41} = 6,09$; $a_5 = \frac{1250}{209} = 5,9$, ci spinge ad ipotizzare che il limite sia $x_1 = 6$. Quindi

$$|a_{n+1} - 6| = \left| \frac{5a_n}{a_n - 1} - 6 \right| = \frac{|a_n - 6|}{a_n - 1}$$

Per valutare il secondo membro della disequazione osserviamo che per $n = 2, 3, 4$, i termini della successione risultano maggiori di 4. Verifichiamo che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti segue dalla osservazione che per ogni $n > 1$ risulta $a_n > 1$ e dalle maggiorazioni seguenti

$$a_{n+1} = \frac{5a_n}{a_n - 1} > 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 5a_n > 4a_n - 4,$$

da cui $a_n - 1 > 3$. Ovvero

$$|a_{n+1} - 6| = \frac{|a_n - 6|}{a_n - 1} < \frac{|a_n - 6|}{3}$$

Iterando il procedimento

$$|a_{n+1} - 6| = \frac{|a_n - 6|}{a_n - 1} < \frac{|a_n - 6|}{3} < \cdots < \frac{|a_2 - 6|}{3^{n-1}} = \frac{4}{3^{n-1}}. \tag{4}$$

Passando al limite abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 6.$$

Svolgimento 3(b).

Si procede come nel caso precedente, osservando peró che $a_n > 4$ per $n \geq 3$.

Svolgimento 3(c).

Applichiamo il criterio della convergenza assoluta considerando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{a_n - 6}{a_n + 1} \right|.$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie applichiamo il criterio del confronto utilizzando la maggiorazione (4) e le considerazioni che la precedono:

$$\frac{|a_n - 6|}{a_n + 1} = \frac{|a_{n-1} - 6|}{(a_{n-1} + 1)(a_{n-1} - 1)} < \frac{|a_n - 6|}{3^2} < \ \cdots \ < \frac{|a_2 - 6|}{3^n} = \frac{4}{3^n}.$$

La serie dei valori assoluti converge perché é maggiorata con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, che é convergente.

□

Dimostrazione. Svolgimento. *Variante (a).* La successione soddisfa la relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ se scegliamo $f(x) = \frac{3x+8}{x+1}$. Per capire l'andamento della funzione f conviene svolgere la divisione così da ottenere $f(x) = 3 + \frac{5}{x+1}$. La funzione f è quindi una iperbole con asintoto verticale la retta $x = -1$ e asintoto orizzontale $y = 3$. Determiniamo i punti fissi di f:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3x + 8}{x + 1} \\ x^2 + x &= 3x + 8 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 8} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo due punti fissi $x_1 = 4$ e $x_2 = -2$. Nell'intervallo $I = (-1, +\infty)$ la funzione è strettamente decrescente e l'intervallo I è invariante, in quanto $f(x) > 3$ sull'intervallo e dunque $f(x) \in (3, +\infty) \subset (-1, +\infty)$. Dunque visto che $\alpha \in I$ si ha $a_n \in I$ per ogni n. Siccome f è decrescente su I risulta che le successioni a_{2n} e a_{2n+1} sono entrambe monotone, una crescente e l'altra decrescente. Osserviamo che sull'intervallo $(-1, 4]$ si ha $f(x) > 4$ mentre sull'intervallo $[4, +\infty)$ si ha $f(x) < 4$. Dunque l'intervallo $(-1, 4]$ viene mandato in $[4, +\infty)$ e viceversa l'intervallo $[4, +\infty)$ viene mandato in $(-1, 4]$. Dunque visto che $a_1 = \alpha = 0 \leq 4$ si ha $a_2 \geq 4$, $a_3 \leq 4$ e così via... Significa che $a_{2n+1} \leq 4$ per ogni n mentre $a_{2n} \geq 4$. Essendo monotone, entrambe le successioni hanno limite: $a_{2n+1} \to \ell_1$ $a_{2n} \to \ell_2$, e dovrà essere $\ell_1 \in [-1, 4]$, $\ell_2 \in [4, +\infty)$. Non può essere $\ell_1 = -1$ altrimenti si avrebbe $a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) \to +\infty$ e $a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) \to 3$. Ma a_{2n+3} e a_{2n+1} devono avere lo stesso limite quindi questo è assurdo. Dunque $\ell_1 \in (-1, 4]$ è un punto in cui la funzione f è definita e continua perciò ℓ_1 deve essere un punto fisso della iterata seconda (si passi al limite nell'eguaglianza $a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1})))$ ovvero deve risolvere l'equazione: $f(f(x)) = x$:

$$\begin{aligned}
x &= 3 + \frac{5}{3 + \frac{5}{x+1} + 1} \\
x &= 3 + \frac{5x+5}{4x+9} \\
x \cdot (4x+9) &= 3(4x+9) + 5x + 5.
\end{aligned}$$

Si tratta di una equazione di secondo grado che potremmo risolvere facilmente. Ma a questo punto non serve neanche risolverla perché già sappiamo che i punti fissi di f sono anche punti fissi di $f \circ f$ in quanto $f(f(x)) = f(x) = x$ se $x = f(x)$. Sappiamo quindi che x_1 e x_2 sono soluzioni di questa equazione e non ci possono essere altre soluzioni perché una equazione di secondo grado ha al massimo due soluzioni distinte. L'unica soluzione che sta nell'intervallo $(-1, 3)$ è $x_1 = 4$ e dunque possiamo affermare che $\ell_1 = 4$. Ma allora $a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) \to f(4) = 4$ e quindi $\ell_2 = \ell_1 = 4$. L'intera successione converge al limite 4.

Nel caso $\alpha = -\frac{5}{2}$ è sufficiente calcolare i primi termini della successione (lo si intuisce facendo un diagramma a ragnatela):

$$a_1 = -\frac{5}{2}, \qquad a_2 = f(a_1) = -\frac{1}{3}, \qquad a_3 = f(a_2) = \frac{21}{2} \in [4, +\infty).$$

Sappiamo già che allora $a_4 \in (-1, 4]$ e si può ripetere il ragionamento precedente (termini pari e dispari risultano scambiati ma il risultato non cambia). La successione converge anche in questo caso al limite 4.

Consideriamo ora la serie al punto iii. Possiamo provare a studiare la convergenza assoluta mediante il criterio del rapporto. Posto

$$b_n = \frac{a_n - 4}{a_n + 1}$$

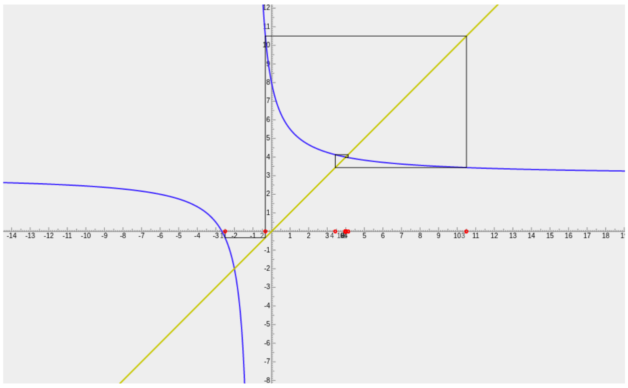

Figura 1: Diagramma a ragnatela dell'esercizio 3

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \left|\frac{\frac{a_{n+1}-4}{a_{n+1}+1}}{\frac{a_n-4}{a_n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}+1} - \frac{5}{a_{n+1}+1}}{\frac{a_n-4}{a_n+1}}\right| \\
&= \left|\frac{1 - \frac{5(a_n+1)}{3a_n+8}}{\frac{a_n-4}{a_n+1}}\right| = \left|\frac{-a_n+4}{4a_n+9} \cdot \frac{a_n+1}{a_n-4}\right| = \left|\frac{a_n+1}{4a_n+9}\right| \\
&\to \left|\frac{4+1}{16+9}\right| = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Visto che il rapporto tende ad un limite minore di uno, la serie $\sum |b_k|$ è convergente e dunque (criterio di convergenza assoluta) la serie data $\sum b_k$ è convergente.

Le varianti (b), (c) e (d) sono simili alla (a) e si possono risolvere seguendo gli stessi passi. Nel caso (b) la successione tende a 3, nel caso (c) tende a 2 e nel caso (d) tende a 6. $\square$