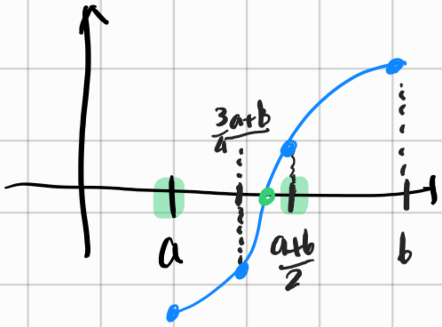
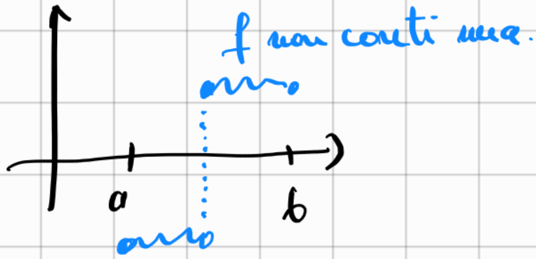
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 36 - 9.1.2023

insieme ordinato continuo.

Teorema degli zeri Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $f(a)\le 0$ e $f(b)\ge 0$ (oppure $f(b)\le 0$ e $f(a)\ge 0$)

Tesi: $\exists\, x\in[a,b]$ t.c. $f(x)=0$.





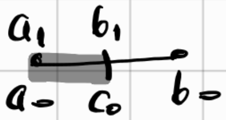
dim (metodo di bisezione)

$$f(a)\le 0,\ f(b)\ge 0$$

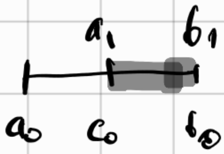
$a_0=a,\ b_0=b \qquad c_0=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{a+b}{2}$

$f(a_0)\le 0 \quad f(b_0)\ge 0$

Se $f(c_0)\ge 0$ allora $\begin{cases} a_1=a_0\\ b_1=c_0\end{cases}$



Se $f(c_0)<0$ allora $\begin{cases} a_1=c_0\\ b_1=b_0\end{cases}$



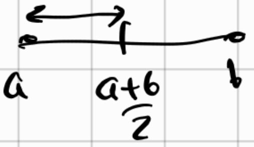
itero ....

$$\begin{cases} a_{n+1}=\begin{cases} a_n & \text{se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\ge 0\\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{altrimenti}\end{cases}\\[2ex] b_{n+1}=\begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\ge 0\\ b_n & \text{altrimenti}\end{cases}\end{cases}$$

Invarianti: $\forall n$: $f(a_n)\le 0$, $f(b_n)\ge 0$, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$

$a_n\le b_n \qquad a_{n+1}\ge a_n,\ b_{n+1}\le b_n$

$$\left[\quad \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} \quad \right]$$



a_n, b_n sono monotone $\Rightarrow$ hanno limite

$a_n \longrightarrow x$ $\qquad$ $b_n - a_n \longrightarrow 0$

$a \leq a_n \leq b_n \leq b$ $\qquad$ $x \in [a,b]$ $\qquad$ $b_n = \underset{\downarrow \atop x}{a_n} + \underset{\downarrow \atop 0}{(b_n - a_n)} \longrightarrow x$

$a_n \longrightarrow x$ $\qquad\qquad$ $b_n \longrightarrow x$

$\underset{0}{\underset{\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{f(a_n)}} \longrightarrow \underset{0}{\underset{\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{f(x)}}$ $\qquad\qquad$ $\underset{0}{\underset{\vee}{f(b_n)}} \longrightarrow \underset{0}{\underset{\vee}{f(x)}}$

$f(x) = 0$

$x^5 = x+1$

Es Risolvere: $x^5 - x - 1 = 0$ $\qquad$ $[P(x)=0]$

ha soluzione?

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

$f(0) = -1 < 0$ $\qquad$ $\exists \bar{x} \in [0,2] : f(\bar{x}) = 0.$

$f(2) = 29 > 0$

$[x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}]$

$\bar{x}$

$$\begin{array}{r} 243 \\ -48 \\ -32 \\ \hline 163 \end{array}$$

$f(1) = -1 < 0$ $\qquad$ $f(2) > 0$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^5}{2^5} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{243 - 48 - 32}{2^5}$$

$$= \frac{163}{2^5} > 0$$

$1 < \bar{x} < 1{,}5$

$$f(1.2) = \left(\frac{12}{10}\right)^5 - \frac{12}{10} - 1$$

$$= \frac{12^5 - 12\cdot 10^4 - 10^5}{10^5}$$

$$= \frac{2^5}{5^5}\left[6^5 - \underbrace{6\cdot 5^4 - 5^5}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left[6^5 - 5^4(6+5)\right]$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left[6^5 - 11\cdot 5^4\right) > 0$$

$1 < \bar{x} < 1.2$

$f(1.1) = \ldots\ldots < 0$

$1.1 < \bar{x} < 1.2$ $\qquad\qquad \bar{x} \sim 1.1\ldots$

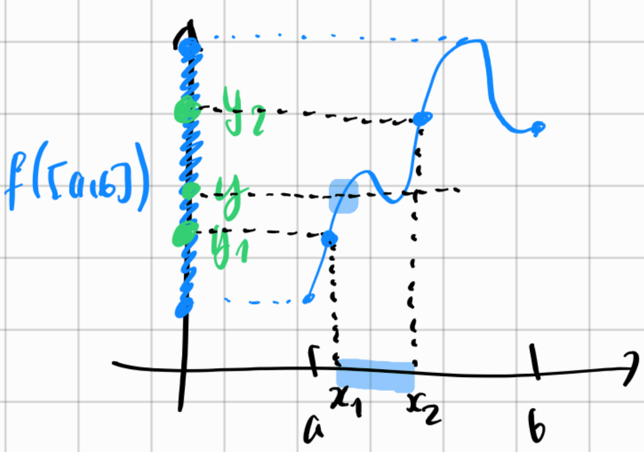
$f(1.15) = \ldots\ldots$

<u>Corollario</u> (teorema dei valori intermedi)

$f : I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo

Se $y_1, y_2 \in f(I)$ e $y_1 < y < y_2$ allora $y \in f(I)$

$$f(I) = \{f(x) : x \in I\} = \{\text{valori di } f\}$$



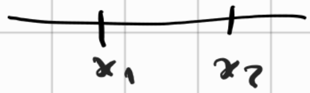
Ovvero Se f è continua su I, I intervallo allora $f(I)$ è un intervallo.

Ovvero le funzioni continue mandano intervalli in intervalli.

dim $y_1, y_2 \in f(I)$ $\exists\, x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1$
$f(x_2) = y_2$

Supponiamo $x_1 \leq x_2$. Sia $y_1 \leq y \leq y_2$

Applico il teorema degli zeri a



$$g(x) = f(x) - y$$

$$\left.\begin{aligned} &g \text{ è continua su } [x_1, x_2] \\ &g(x_1) = f(x_1) - y = y_1 - y \leq 0 \\ &g(x_2) = f(x_2) - y = y_2 - y \geq 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{teo. zeri}} \exists x : g(x) = 0$$

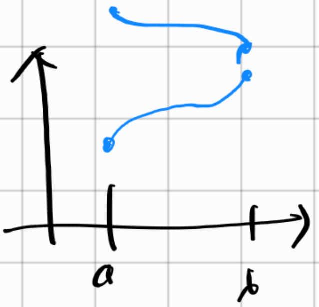
$f(x) = y$

$y \in f([x_1, x_2])$
$\subseteq f(I)$.

Se $x_1 \geq x_2$ ... si fa lo stesso.

$\square$

Esercizio Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Allora f è strettamente monotona.



DERIVATA

Def Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione di A.

Il limite

rapporto incrementale

$$m = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

se esiste si chiama derivata di f in x_0.
Se il limite esiste ed è finito ($m \in \mathbb{R}$) diremo che f è derivabile in x_0 e porremo: $f'(x_0)=m$.

$f': B \to \mathbb{R}$ $\qquad B \subseteq A$

$B = \{x \in A \cap A' : f \text{ derivabile in } x\}$

Interpretazione cinematica

x = tempo

$f(x)$ = posizione al tempo x

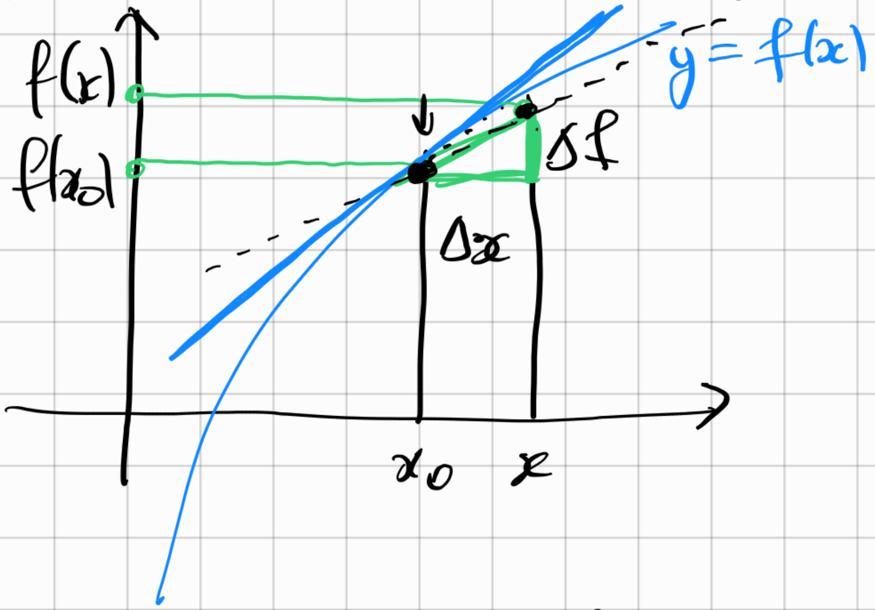
$f'(x)$ = velocità istantanea al tempo x

$f(x)$ $\quad f(x+h)$

$$\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \text{velocità media tra } x \text{ e } x+h$$

$f(x) = mx+q \qquad f'(x) = m.$

Interpretazione geometrica



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\text{incremento di } f}{\text{incremento di } x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

x

rapporto incrementale

$\Delta f / \Delta x$ = pendenza della retta secante.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$x = x_0 + h$

Per definizione la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ con pendenza $f'(x_0)$ si chiama <u>retta tangente</u> al grafico di f.

Equazione della retta tangente

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$$