ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 37 - 11.1.2023

Derivata

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{x = x_0+h}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$y = f(x)$

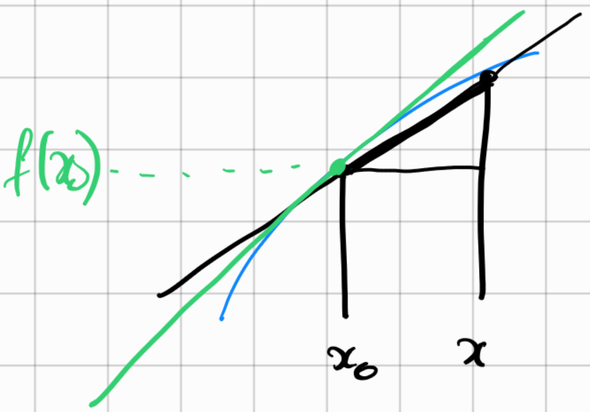
$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

$$\Delta x = x - x_0$$

Notazioni

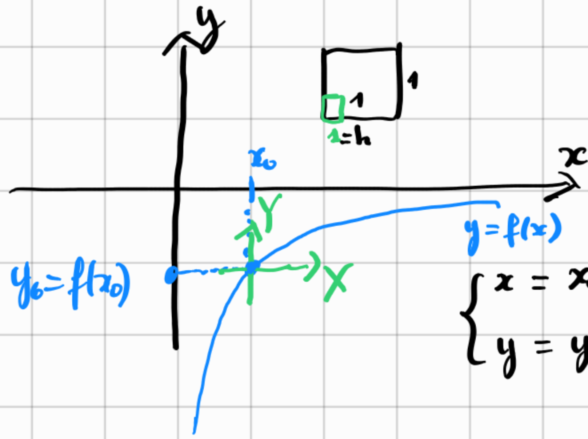
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= Df(x) = \big(f(x)\big)'$$



$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

La retta tangente in un punto è il blow-up del grafico della funzione nel punto.



$$\begin{cases} x = x_0 + h\cdot X \\ y = y_0 + h\cdot Y \end{cases}$$

$y = f(x)$

$$\underset{\substack{\| \\ f(x_0)}}{y_0} + hY = f(x_0 + h\cdot X)$$

$$Y = \frac{f(x_0+h\cdot X)-f(x_0)}{h\cdot X}\cdot X$$

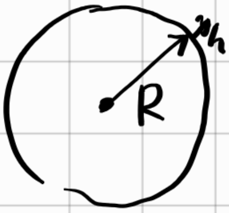
Se f è derivabile in x_0 per $h\to 0$ si ottiene:

$$\boxed{Y = f'(x_0)\cdot X.} \leftarrow \text{retta tangente}$$

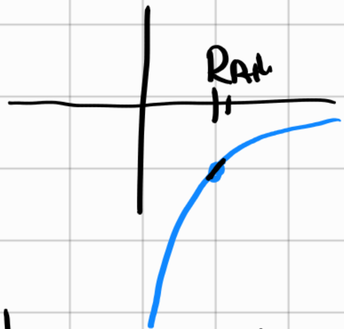
ESEMPIO "fisico"

$U(r)$ = campo gravitazionale generato dalla terra a distanza r dal centro

$$= -\frac{GM}{r} \qquad\qquad F = G\frac{mM}{r^2}$$



$h \ll R$



Chi è $U(R+h)$ quando h è molto piccolo rispetto a R.

$$U(R+h) = -\frac{GM}{R+h} = -\frac{GM}{R} + \left[\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R+h}\right]$$

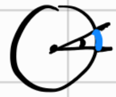
$$= -\frac{GM}{R} + \frac{\cancel{GMR}+GMh-\cancel{GMR}}{R\cdot(R+h)}$$

$$= -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R(R+h)}\cdot h \qquad\qquad R+h \simeq R$$

$$\approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2}\cdot h$$

$$= C + g\cdot h \qquad g := \frac{GM}{R^2}$$

R, g, G



Calcolo della derivata di una funzione elementare

Esempio $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad x_0 \neq 0$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\cancel{x_0} - (\cancel{x_0}+\cancel{h})}{\cancel{h}(x_0+h)\cdot x_0}$$

$$= -\frac{1}{(x_0+h)\cdot x_0} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{x_0^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

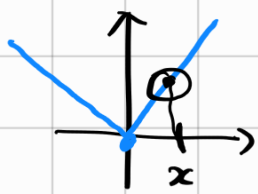
Esempio 2 $\quad f(x) = m\cdot x + q$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{m(\cancel{x_0}+\cancel{h}) + \cancel{q} - (m\cancel{x_0}+\cancel{q})}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} m = m.$$

$$f'(x) = m$$

Esempio $\quad f(x) = |x|$



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

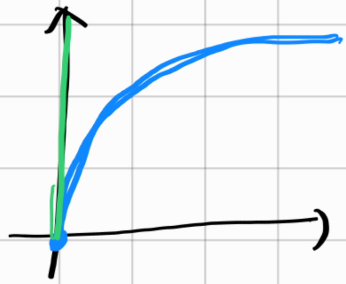
$f(x) = |x|$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

ma non è derivabile in $x_0 = 0$

(è derivabile in tutti gli altri punti).

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}.$$

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x) = \sqrt{x}$



$x_0 = 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$$

$h > 0$ $\quad$ per $h \to 0$.

Se $x_0 > 0$ $\quad f$ è derivabile in x_0:

$$\frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{\cancel{x_0} + \cancel{h} - \cancel{x_0}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Teorema Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dim

se x_0 non è punto isolato.

f è continua in x_0 $\iff$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

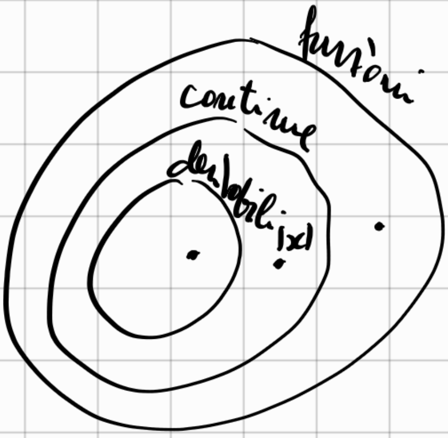
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{0} + f(x_0)\right]$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0). \qquad \square$$

Osservazione:

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\to 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\to 0}}$$

Se f è derivabile ho una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.



Teorema (derivata funzione composta)

$A \subseteq \mathbb{R}$
$B \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc} \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid & & \\ x_0 & \longmapsto & y_0 & \longmapsto & g(y_0) \end{array}$$

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ allora $g\circ f$ è derivabile in x_0 e la sua derivata è: $g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

Es $\quad f(x) = \sqrt{x} \qquad g(y) = \frac{1}{y}$

f è derivabile in $x_0 > 0$, g è derivabile in $\sqrt{x_0}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = D\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{x}}$$

dim

$$f(x_0) = y_0$$

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

⚠ $f(x) - f(x_0)$ può essere nullo

$$= \left[\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\right]_{y = f(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$x \to x_0$

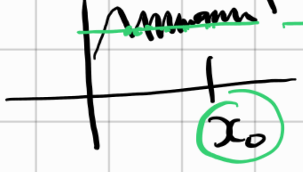
$$y = f(x) \to f(x_0) = y_0$$

f è continua in x_0

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

La dimostrazione fallisce se in ogni intorno di x_0 c'è un punto x t.c. $f(x) = f(x_0)$



Ma in tal caso deve essere $f'(x_0)=0$.

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si annulla su una successione che tende a x_0

Ma allora anche $g(f(x))-g(f(x_0))=0$ negli stessi punti

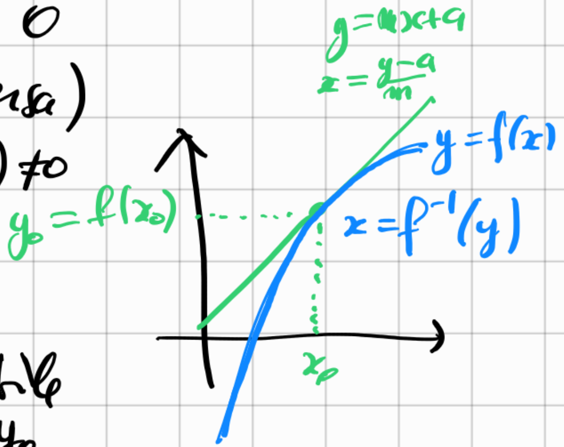
quindi $\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=0$

Dunque $\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} =$ COME SOPRA se $f(x)\neq f(x_0)$; 0 se $f(x)=f(x_0)$

$$= \begin{cases} g'(y_0)\cdot f'(x_0) \\ 0 = g'(y_0)\cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=0} \end{cases} \qquad \square$$

Teorema (derivata della funzione inversa)

Hyp: $y_0=f(x_0)$, f derivabile in x_0, $f'(x_0)\neq 0$, $f:A\to B$ biettiva, f^{-1} continua in y_0.



Th: $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ $\quad f^{-1}$ è derivabile in y_0

dim

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \left[\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\right]_{x=f^{-1}(y)}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]_{x=f^{-1}(y)}} \xrightarrow[y\to y_0]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

non può annullarsi

f è iniettiva

se $y \to y_0$

$$x = f^{-1}(y) \xrightarrow{?} x_0 = f^{-1}(y_0)$$

ok se f^{-1} è continua in y_0.

allora $x \to x_0$.

$\square$

Per casa cosa succede se f^{-1} non è continua?