ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 40 - 18. 1. 2023

Criterio di monotonia

ES: $I = [0, +\infty)$, $J = (0, +\infty)$

$f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $J = (\inf I, \sup I)$

f continua su I derivabile su J $\subseteq I$

Dati $a, b \in I$ $a < b$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
è continua e f derivabile su $(a,b) \subseteq J$.

Lagrange: $\exists x \in (a,b)$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x)$

Se $\boxed{f'(x) \geq 0}$ $\forall x \in J$
≤ 0
$= 0$

allora $>$ $<$ $=$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ $=$ ≥ 0 ≤ 0 $\forall a, b \in I$.

Se $b > a$ $f(b) - f(a) \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(b) \geq f(a)$
$\leq$ $\leq$
$>$ $>$
$<$ $<$
$=$ $=$

$\boxed{f \text{ è crescente.}}$
decrescente
strettamente crescente
strettamente decrescente
costante.

Esempio: Dimostrare che $f(x)=x^5+x^3+x$ è bigettiva $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

($\forall y\in\mathbb{R}$ $x^5+x^3+x=y$ ha una e una sola soluzione)

dim $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$

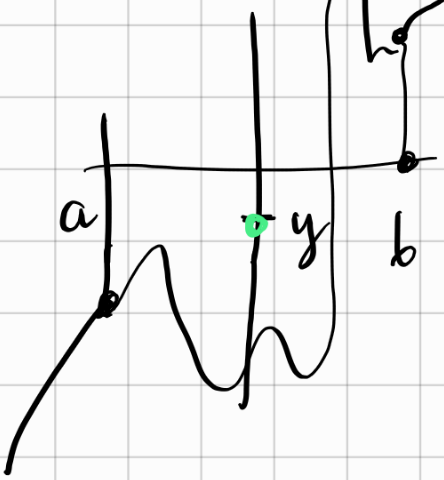
f è strettamente crescente $\Rightarrow$ f iniettiva

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Per il teorema dei valori intermedi

Dato $y\in\mathbb{R}$ visto che $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\exists\, a$ t.c. $\forall x\leq a$ $f(x)<y$.



visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\exists\, b$: $\forall x>b$ $f(x)>y$.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua.

$f(a)\leq y\leq f(b)$

y è un intermedio a due valori

quindi y è un valore: $\exists\, x\in[a,b]: f(x)=y$.

OPPURE (più astratto)

$\mathbb{R}$ intervallo, f continua su $\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(\mathbb{R})$ è un intervallo.

ma $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ perché $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$
$\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$ perché $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva.

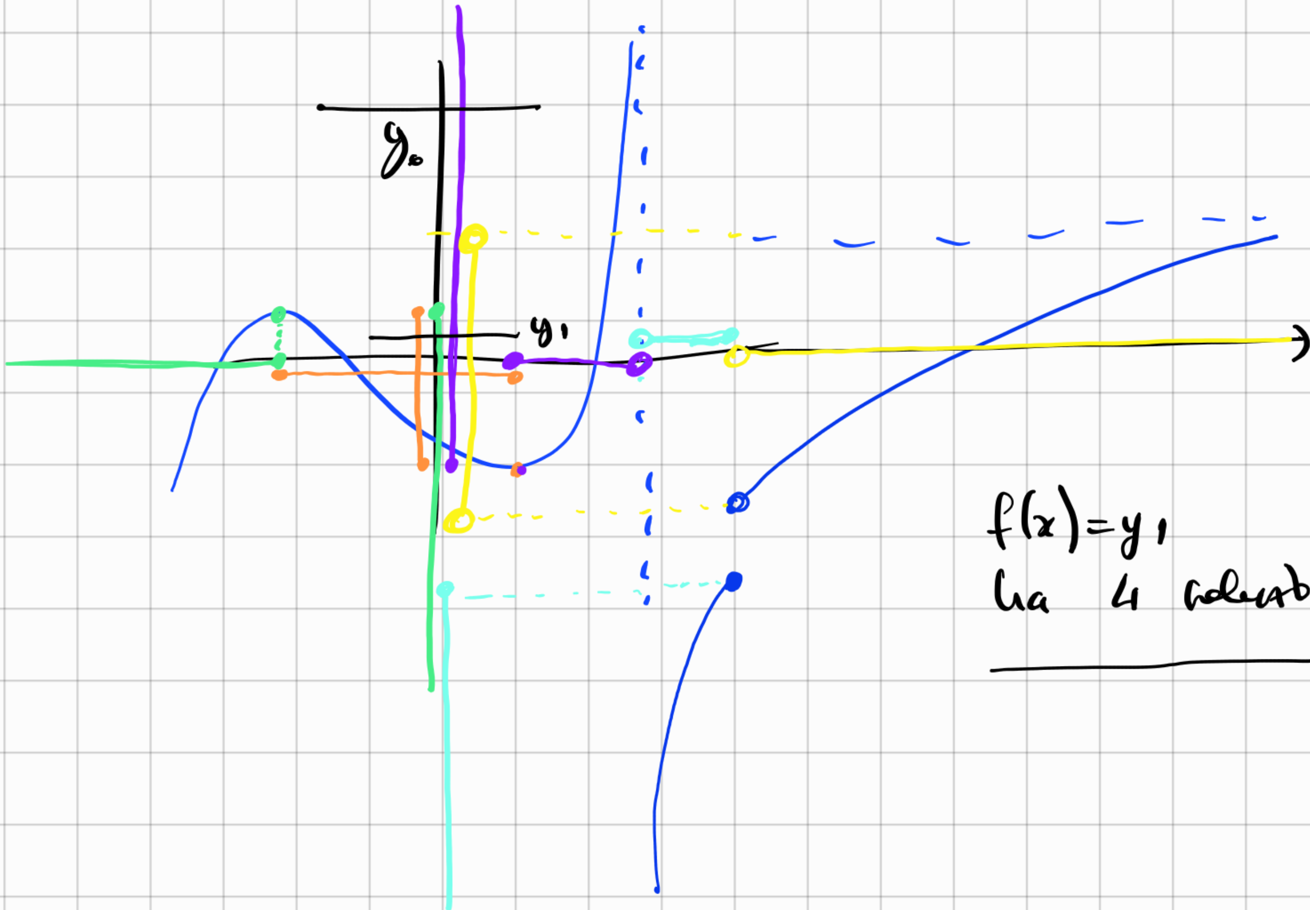
Esercizio per casa: Sia $f: A \to \mathbb{R}$ iniettiva.

E' possibile che f non sia strettamente monotona.

[Ma cosa succede se A è un intervallo e f continua.]

STUDIO di FUNZIONE $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

- Suddivido A in intervalli disgiunti
- Calcolo il limite di f agli estremi di questi intervalli $\Rightarrow$ determino $f(A)$
- Cerco di determinare gli intervalli in cui f è monotona.



$f(x) = y_1$
ha 4 soluzioni

Torniamo a $f(x) = x^5 + x^3 + x$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è bigettiva quindi $\exists\, g(y) = f^{-1}(y)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bigettiva.

$$f'(x) \geq 1 \Rightarrow f'(x) \neq 0$$

g é continua? Sí perché $f : I \to \mathbb{R}$ (intervallo) è monotona (c'è un teorema)

g è derivabile? Sí perchè $f'(x) \neq 0$ e g è continua

Teo derivata della fn inversa

Teo della continuità della inversa

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

ES. Calcolare $g'(3)$..

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))}$$

$g(3) = f^{-1}(3)$ è la soluzione

di $f(x) = 3$

$x^5 + x^3 + x = 3$

$x = 1$ è soluzione perché si vede a occhio.

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{9}$$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

$f'(1) = 5 + 3 + 1 = 9$

ES

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

ES $g'(1) = ?$ lo faccio numericamente.

Studio di funzione → risolvere una equazione/disequazione
→ risolvere problemi di ottimizzazione.

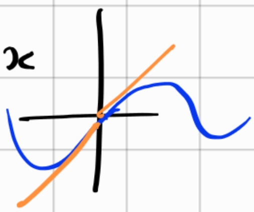
Esempio Dimostrare che $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad f(x) \geq 0$$

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$\sin x \gtrless x$



$$f''(x) = -\cos x + 1 = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x.$$

Criterio di monotonia per f' $\Rightarrow$ f' è crescente

$$f'(0) = 0$$

x		0	
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$ (≤ 0)	0	$+$ (≥ 0)
$f(x)$	↘	0	↗

$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0$

$x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq f'(0) = 0$

Criterio di monotonia per f: su $[0, +\infty)$ $f'(x) \geq 0$
f è crescente
su $(-\infty, 0]$ $f'(x) \leq 0$
f è decrescente

$$f(0) = 0$$

0 è punto di minimo assoluto per f

$f(0) = 0$ è minimo assoluto di f.

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x.$ $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \\ x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \end{array}\right]$

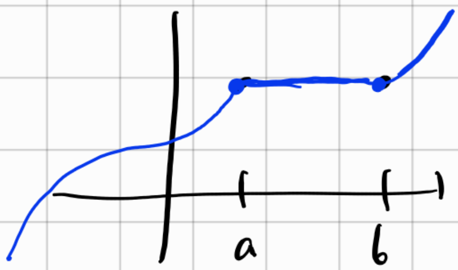
Sarà $f(x) > 0$ se $x \neq 0$?

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) = 1 - \cos x \geq 0 & \forall x \\ f''(x) = 1 - \cos x > 0 & \forall x \neq 2k\pi. \end{array}\right] \quad f''(x) = 0 \text{ solo su } 2\pi\mathbb{Z}.$$

$f'(x)$ è crescente. E' strettamente crescente?

Osservazione Sia f crescente ma non strettamente.

$\exists\, a < b$ t.c. $\left.\begin{array}{l}\text{non: } f(a) < f(b) \\ \text{ma: } f(a) \leq f(b)\end{array}\right\} \Rightarrow f(a) = f(b)$



se $a \leq x \leq b$

$\underbrace{f(a) \leq f(x) \leq f(b)}_{=}$

dunque f è costante su tutto $[a, b]$.

$f' = 0$ su (a, b).

Nell'esempio $f'' = 0$ su $2\pi\mathbb{Z}$ ma non esiste $a < b$ t.c. $[a, b] \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow f'$ è strettamente crescente.

In alternativa $I = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$
$J = (2k\pi, 2(k+1)\pi)$

$f'' > 0$ su $J \Rightarrow f'$ è strettamente crescente su I.

$\Rightarrow f'$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

(Lemma $f : I \cup J \to \mathbb{R}$, $I \cap J \neq \emptyset$

Se $\begin{cases} f \text{ strett. crescente su } I \\ f \text{ strett. crescente su } J \end{cases}$

allora f strett. crescente su $I \cup J$.)

(Lemma $f : \bigcup_k A_k \to \mathbb{R}$

$A_{k+1} \supseteq A_k$, f strett. cresc. su ogni A_k.

$\Rightarrow$ f è strett. crescente su $\bigcup_k A_k$.

Per finire $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$$\underbrace{f''(x) \geq 0 \qquad f''(x) = 0 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}}$$

$\Downarrow$

$f'(x)$ è strett. crescente

$\Downarrow$

f strett. crescente su $[0, +\infty)$
f strett. decrescente su $(-\infty, 0]$.
$\Leftarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \\ x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 0 è punto di minimo "stretto" se $x \neq 0$ $f(x) > 0$.