ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 43 - 25.1.2023

<u>Polinomio di Taylor</u> di ordine n, centrato in x_0 per la funzione f è:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

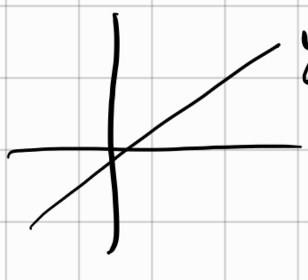
$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Es. $f(x) = \sin x$, $n = 3$, $x_0 = 0$

$$\sin x \overset{?}{\simeq} P(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sqrt[3]{x - \sin x} \simeq \sqrt[3]{x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{6}} = \frac{x}{\sqrt[3]{6}}$$



$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{6}} \simeq \sqrt[3]{x - \sin x}$$

<u>Teorema</u> (caratterizzazione n.1) Il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 della funzione f è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che ha le stesse derivate di f in x_0 fino all'ordine n.

[$n+1$ condizioni per determinare $n+1$ coefficienti del polinomio [in estratto: $L: \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$]

$$P \longmapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P'(x_0) \\ \vdots \\ P^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

dim

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) a_k (x-x_0)^{k-2} = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 (x-x_0) + \dots$$

$\vdots$

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} \underbrace{k(k-1)\dots(k-j+1)}_{j \text{ fattori}} a_k (x-x_0)^{k-j}$$

$$P^{(j)}(x_0) = \underbrace{j(j-1)\dots 1 \; a_j}_{k=j} \; \underbrace{+ 0 + 0 + 0}_{k>j}$$

$$= j! \cdot a_j$$

$$P^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$$

Se voglio $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

dovrà essere $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \square$$

(Corollario)

Osservazione. Se P è il polinomio di Taylor di ordine n di f allora P' è il polinomio di Taylor di ordine $n-1$ di f'.

dim

Se Q è il pol. di T. di f' di ordine $(n-1)$

Q è l'unico pol. di $\deg Q \leq n-1$ t.c.

$$Q^{(k)}(x_0) = (f')^{(k)}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0) = P^{(k+1)}(x_0) = (P')^{(k)}(x_0)$$

per l'unicità nel teorema precedente $Q = P'$.

dim. alternativa

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

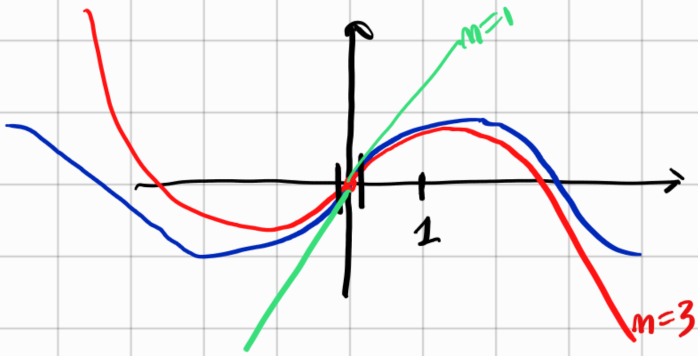
$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

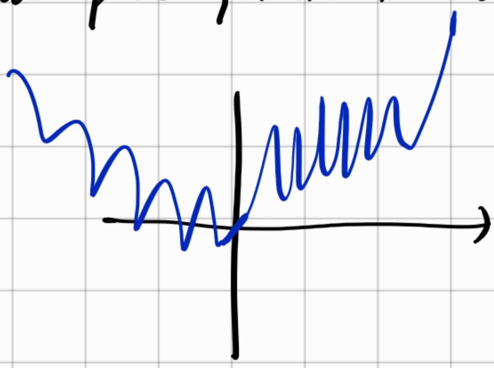
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

= Pol. di Taylor di f' di ordine $n-1$. □

Oss 2 Il polinomio di Taylor è una proprietà locale, dipende solo dai valori di f in un qualunque intorno di x_0





Oss 3 Il Pol. di Taylor di ordine 1 è:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) = \text{retta tangente}$$

In che senso P approssima bene f in un intorno di x_0?

Teorema (formula di Taylor con resto di Peano)

[Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, f sia derivabile $n-1$ volte su tutto I e esiste $f^{(n)}(x_0)$. $n \geq 1$

Allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ $\quad [f(x) - P(x) << (x-x_0)^n]$

dove P è il pol. di Taylor di f, di ordine n centrato in x_0.

(Ad esempio basta che $f \in C^n(I)$ o anche $f \in C^\infty(I)$)

Viceversa se Q è un polinomio di $\deg Q \leq n$ tale che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ allora $Q = P$.

dim per induzione su $n \geq 1$

Se $n = 1$. Hyp $\begin{cases} f \text{ è derivabile in } x_0 \quad (\exists f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)) \\ P(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{cases}$

Tesi: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = 0$

$$\frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \, f'(x_0)} - f'(x_0) \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

$n \geq 2$

Passo induttivo. Supponiamo il teorema vero con $n-1$ al posto di n.

$$\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{(f(x)-P(x))-(f(x_0)-P(x_0))}{(x-x_0)^n - (x_0-x_0)^n} = \circledast$$

applico il teorema di Cauchy sull'intervallo $[x_0, x]$

$\uparrow$ (intendo $[x, x_0]$ se $x < x_0$)

Quindi $\exists\, y \in (x_0, x)$ t.c.

$y = y(x)$

$$\circledast = \frac{f'(y)-P'(y)}{n(y-x_0)^{n-1}}$$

ora posso usare l'ipotesi induttiva perché P' è il pol. di Taylor di f' di ordine $n-1$.

$$\lim_{y\to x_0} \frac{f'(y)-P'(y)}{(y-x_0)^{n-1}} = 0.$$

Ma allora $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ ok prima parte.

$\uparrow$ cambio di variabile $y = y(x)$.

- dimostriamo il viceversa.

Sia Q, $\deg Q \leq n$, tale che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Sia P il pol. di Taylor di ordine n.

Anche P soddisfa: $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Allora $\dfrac{P(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n} = \dfrac{(P(x)-f(x)) - (Q(x)-f(x))}{(x-x_0)^n} \longrightarrow 0$

$R(x) = P(x) - Q(x)$

$\deg R \leq n$ $\qquad \underbrace{\lim_{x\to x_0} \dfrac{R(x)}{(x-x_0)^n}}$ $= 0.$

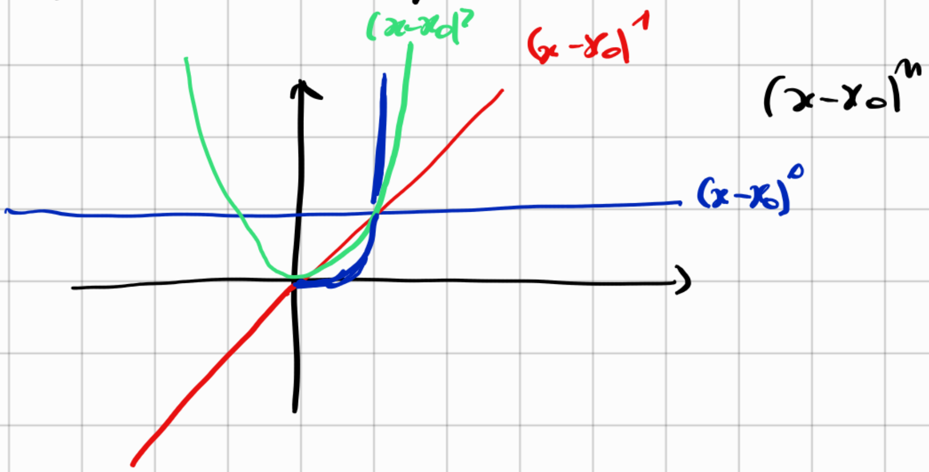
$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{a_0}{(x-x_0)^n} + \frac{a_1}{(x-x_0)^{n-1}} \dots + \frac{a_{n-1}}{(x-x_0)} + a_n$$

Per $x \to x_0$ se $a_0 \neq 0$ $\left|\dfrac{R(x)}{(x-x_0)^n}\right| \to +\infty$

dunque $a_0 = 0$. Ora se $a_1 \neq 0$ $|\dots| \to +\infty$

così via ... fino ad $a_n \to 0$ cioè $a_n = 0$. □



Quindi $\quad \sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ cosa intendo? $\quad \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ n = 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} \longrightarrow 0$$

ovvero se: $\varepsilon(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ $\qquad \dfrac{\varepsilon(x)}{x^3} \to 0$

ovvero $\quad \varepsilon(x) \ll x^3 \quad$ per $x \to 0$

dove: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)$

$$f(x) = \sqrt[3]{x - \sin x} = \sqrt[3]{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x^3}{6} - \varepsilon(x)} = \sqrt[3]{x^3 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon(x)}{x^3}\right)}$$

$$= x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon(x)}{x^3}}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon(x)}{x^3}} \xrightarrow[x \to 0]{} \sqrt[3]{\frac{1}{6}}.$$

NOTAZIONE di LANDAU

Diremo che $\varepsilon(x)$ è un o-piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$

se $\quad \varepsilon(x) \ll (x - x_0)^n$.

e scriveremo $\quad \varepsilon(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$

sarebbe ϵ

ES

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

significa che $\quad \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = o(x^3)$

cioè che $\quad \dfrac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} \to 0 \quad$ per $x \to 0$

e questo è vero per la formula di Taylor.