ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 44 - 27.1.2023

Formula di Taylor: P pol di Taylor di ordine n per f $x \to x_0$

$$\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x)-P(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

ES

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\left(P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0$$

A cosa mi servono?

ES
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin x - x^2}{1-\cos(x^2)} = ?$$

$$\frac{x\cdot\sin x - x^2}{1-\cos(x^2)} = \frac{x\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x^2}{1 - \left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)} = (*)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0 \qquad \cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$o(t^2) = o(x^4)$$

$$t = x^2$$

$$f(t) = o(t^2) \iff \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2} = 0$$

$$\Downarrow \quad t = x^2$$

$$f(x^2) = o(x^4) \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{x^4} = 0$$

per $x \to 0$

$o(x^4) << x^4$

$$(*) = \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} + \boxed{x \cdot o(x^3)} - \cancel{x^2}}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^4}{2} - o(x^4)} = \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \#$$

$$x \cdot o(x^3) = o(x^4) \qquad f(x) = o(x^3) \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \cdot f(x) = o(x^4) \iff \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot f(x)}{x^4} = 0$$

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

$$c \cdot o(x^n) = o(x^n) \qquad \text{infatti} \qquad \frac{f(x)}{x^n} \to 0 \qquad \frac{c \cdot f(x)}{x^n} \to c \cdot 0 = 0$$

$$o(x) - o(x) = o(x) + o(x) = o(x).$$

non è 0

$$\# = \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} \cdot \frac{-\frac{1}{6} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}}{\frac{1}{2} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$\square$

- Se $P(x)$ è un polinomio di grado N. Chi è il polinomio di Taylor T di ordine n di P?

Se $n \geq N$ il p. di T. è $T = P$.

Se $n < N$

ES Sviluppare per $x \to 0$ all'ordine 5 il polinomio $P(x) = x^3 + 3x^4$. $N = 4$

$$P(x) = x^3 + 3x^4 = \underbrace{x^3 + 3x^4} + o(x^5) \qquad n = 5$$

ES Sviluppare per $x \to 0$ all'ordine 5 il polinomio $P(x) = x^3 + 3x^7$

$$P(x) = \underbrace{x^3 + 3\underbrace{x^7}} = \boxed{x^3} + o(x^5)$$

$$\frac{x^7}{x^5} = x^2 \to 0 \quad \text{per } x \to 0$$

ES Sviluppare per $x \to 1$ all'ordine 5 il polinomio $f(x) = x^3 + 3x^7$.

NOTA: $x^7 \to 1$ per $x \to 1$.

[Trovare il polinomio di Taylor P di ordine 5 centrato in $x_0 = 1$, per la funzione $f(x) = x^3 + 3x^7$]

1° modo uso la def. $x_0 = 1$

$$P(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$+ \frac{f^{IV}(1)}{24}(x-1)^4 + \frac{f^{V}(1)}{120}(x-1)^5$$

$f = x^3 + 3x^7$
$f' = 3x^2 + 21x^6$

$$= 4 + 24\cdot(x-1) + 66\cdot(x-1)^2 + 106\cdot(x-1)^3 + 105\cdot(x-1)^4 + 63(x-1)^5$$

$$f'' = 6x + 126\cdot x^5 \qquad f''' = 6 + 630\cdot x^4 \qquad f^{IV} = 2520\cdot x^3$$

$$\frac{2520}{24} = \frac{2400+120}{24} = 100+5 \qquad f^{V} = 2520\cdot 3\, x^2$$

$$\frac{2520\cdot 3}{120} = \frac{2520\cdot 3}{24\cdot 5} = \frac{105\cdot 3}{5} = 63$$

2° modo $\quad f(x) = x^3 + 3x^7 \qquad x \to 1$

$t = x-1$

$x = t+1$

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \\ 1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1 \end{array}$$

$$g(t) = f(t+1) = (t+1)^3 + 3(t+1)^7 =$$

$t \to 0$

$$= 1 + 3t + 3t^2 + t^3 + 3\left[1 + 7t + 21t^2 + 35t^3 + 35t^4 + 21t^5 + \underbrace{7t^6 + t^7}_{o(t^5)}\right]$$

$$= 1 + 3t + 3t^2 + t^3 + 3 + 21t + 63t^2 + 105t^3 + 105t^4 + 63t^5 + o(t^5)$$

$$= \underbrace{4 + 24t + 66t^2 + 106t^3 + 105t^4 + 63t^5}_{\text{è il P. di Taylor.}} + o(t^5)$$

In generale per trovare il polinomio di Taylor di una composizione di funzioni elementari compongo tra loro i polinomi di Taylor (noti a memoria) delle funzioni elementari.

ES Trovare il polinomio di Taylor di ordine 8 per $x \to 0$ della funzione:

$$f(x) = (\sin x)^2 \cdot (2 - 2\cos x)^3.$$

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \cdot \left(\cancel{2} - 2\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)^3$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \cdot \left(x^2 + o(x^2)\right)^3$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \cdot \left(x^6 + o(x^6)\right)$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \cdot \left(x^6 + o(x^6)\right)$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

$$\left(x^2 + o(x^2)\right)^{12} = x^{24} + o(x^{24})$$

$$= x^8 + o(x^8) + \cancel{o(x^{10})} + \cancel{o(x^{10})} + \cancel{o(x^{10})} + \cancel{o(x^{10})}$$

$$= \underbrace{x^8 + o(x^8)}_{}$$

è il polinomio di Taylor.

$$(A+B+C)^2 = (A+B+C)\cdot(A+B+C)$$
$$= A^2 + 2AB + 2AC + B^2 + 2BC + C^2$$

$$(A+B+C)^3 = A^3 + 3A^2B + 3A^2C + 3AB^2 + 6ABC + \ldots$$

$$o(x^6) \overset{??}{=} o(x^4) \qquad \frac{o(x^6)}{x^4} = \frac{o(x^6)}{x^6} \cdot x^2 \to 0$$

$$o(x^4) \overset{NO}{=} o(x^6) \qquad x^5 = o(x^4) \qquad x^5 \overset{?}{=} o(x^6) \quad NO$$

Formalmente: $o(x^6) \subseteq o(x^4)$

$\sin x \in x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$