ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 48 - 6.2.2023

SERIE DI POTENZE

$$\left(e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right)$$

Dati $a_k \in \mathbb{C}$ considero la serie:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k$$

f è definita sull'insieme "di convergenza"

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : \sum a_k z^k \text{ converge} \}$$

Come è fatto A?

ES 1 $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$

- converge se $|z| < 1$ (criterio del rapporto)

$$\sum |z^k| = \sum |z|^k \qquad \frac{|z|^{k+1}}{|z|^k} = |z|$$

└ convergenza assoluta

- non converge se $|z| > 1$

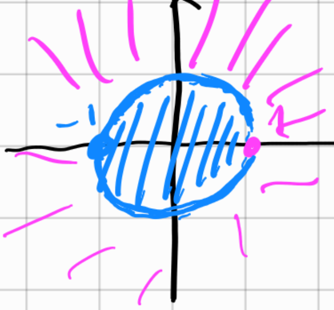
$|z|^k$ non è infinitesimo
z^k " "

Se $|z| = 1$
- $z = 1$ $\sum 1 = +\infty$ non è convergente
- $z = -1$ $\sum (-1)^k$

$$|z^k| = |z|^k = 1$$

ES 2 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$ convergenza assoluta + criterio del rapporto

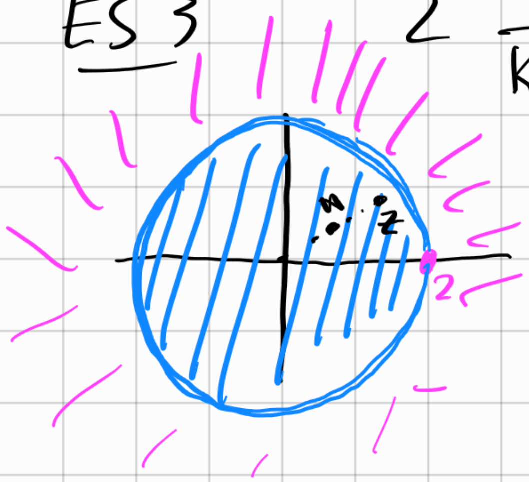
non converge
converge



$$\frac{\frac{|z|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|z|^k}{k}} = |z| \cdot \frac{k}{k+1} \longrightarrow |z|$$

$|z| = 1$
- $z = 1$ serie armonica $\sum \frac{1}{k} = +\infty$
- $z = -1$ " " segni alterni $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge

ES 3 $\quad \sum \frac{z^k}{k\cdot 2^k} = \sum \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k}{k}$



$w = \frac{z}{2}$

In generale data $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

convergenza assoluta: $\sum |a_k z^k| = \sum |a_k|\cdot|z|^k$

criterio della radice: $\sqrt[k]{|a_k|\cdot|z|^k} = \underbrace{\sqrt[k]{|a_k|}}_{\ell}\cdot|z|.$

$\ell = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

$\ell\in[0,+\infty]$

Se $\ell\cdot|z|<1$ $\quad |z|<\frac{1}{\ell}$

la serie converge.

Se $\ell\cdot|z|>1$ $\quad |z|>\frac{1}{\ell}$

$|a_k z^k| = \Big(\underbrace{\sqrt[k]{|a_k|}\cdot|z|}_{\downarrow\ \ell\cdot|z|}\Big)^k \longrightarrow +\infty$

$a_k z^k$ non è infinitesima!

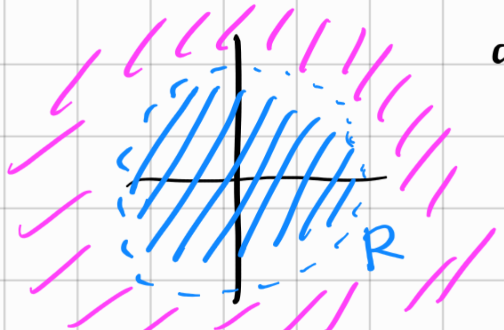
Def Dato $\sum a_k z^k$

Poniamo $\boxed{R = \frac{1}{\ell}}$ dove $\ell = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$

La serie è assolutamente convergente $\forall z: |z|<R$

La serie non è infinitesima $\forall z: |z|>R$

quindi non converge



$\{z: |z|<R\} \subseteq A \subseteq \{z: |z|\le R\}$

Se $\ell = +\infty$, $R = 0$, la serie converge solo se $z = 0$.

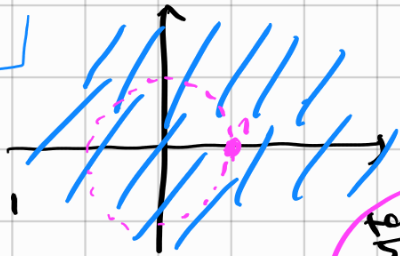
Se $\ell = 0$, $R = +\infty$, la serie converge assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$.

Come è fatta $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k$, $f: A \to \mathbb{C}$

ES $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ $\quad a_k = 1 \quad \sqrt[k]{a_k} = 1 \to 1$

$\ell = 1, \quad R = \frac{1}{\ell} = 1.$

se $|z|<1$ $= \boxed{\frac{1}{1-z}}$



serie geometrica $x^2 < 1$

ES. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ ← ha raggio di convergenza $R = 1$

i k sono diversi

serie di potenze

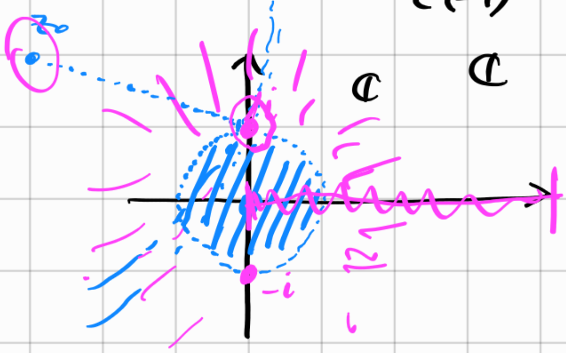
$a_0 = 1, \ a_1 = 0, \ a_2 = -1, \ a_3 = 0, \ a_4 = 1 \ \dots$

$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$

$\ell = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$

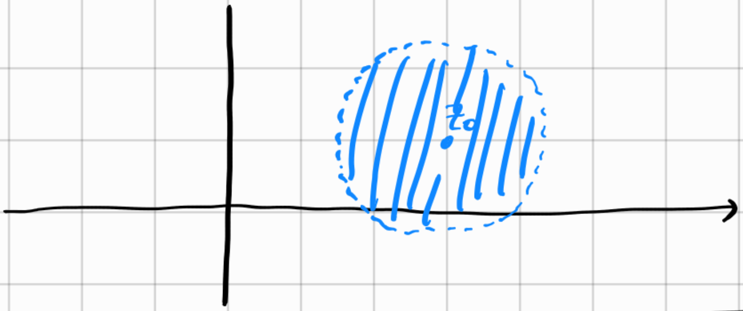
$R = \frac{1}{\ell} = 1$



Più in generale potrei considerare $\sum a_k \cdot (z - z_0)^k$

posto $w = z - z_0$

diventa $\sum a_k \cdot w^k$.



Teorema (continuità della somma di una serie di potenze)

Sia $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, sia R il raggio di convergenza. Sia $|z_0|<R$.

Allora f è continua in z_0.

Lemma (stabilità del raggio di convergenza)

Se $\sum a_k \cdot z^k$ ha raggio di convergenza R

anche $\sum k \cdot a_k z^k$ ha raggio di convergenza R

dim $b_k = k \cdot a_k$ $\quad \limsup_k \sqrt[k]{b_k} = \limsup \sqrt[k]{k \cdot a_k} =$

$= \limsup \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{1} \cdot \sqrt[k]{a_k} = \limsup \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{R}$

$\square$

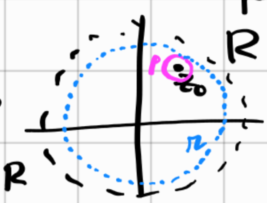
dim Tesi:

$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ ovvero $f(z)-f(z_0) \to 0$ per $z \to z_0$.

Hyp $|z_0|<R$

suppongo $|z| \le r < R$

con $|z_0| < r < R$



$\rho = r - |z_0|$

$$f(z)-f(z_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z_0^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z^k - z_0^k)$$

sono serie convergenti

$$z^k - z_0^k = (z-z_0)\cdot\Big(\underbrace{z^{k-1} + z^{k-2}\cdot z_0 + \dots + z^2 z_0^{k-3} + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}}_{k \text{ addendi}}\Big)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j}\right)$$

$$|z^k - z_0^k| \le |z-z_0|\cdot \sum_{j=0}^{k-1}|z|^j\cdot|z_0|^{k-1-j} \le |z-z_0|\cdot\sum_{j=0}^{k-1} r^{k-1} \le |z-z_0|\cdot k\cdot r^{k-1}$$

$|z|\le r$ $\qquad \underbrace{|z|^j\cdot|z_0|^{k-1-j}} \le r^{k-1}$

$|z_0|\le r$

$$|f(z)-f(z_0)| \le \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|\cdot|z^k-z_0^k| \le \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|\cdot k\cdot r^{k-1}\cdot|z-z_0|$$

$$= |z-z_0|\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1}}_{\text{converge?}} = |z-z_0|\cdot L \to 0$$

per $z\to z_0$

converge? sì ha lo stesso raggio di convergenza di

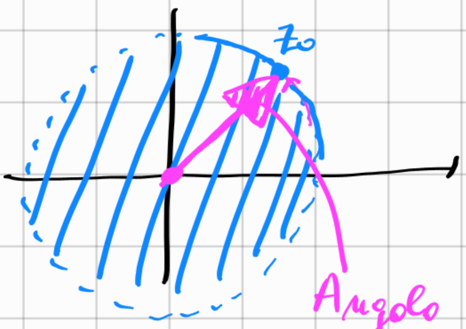
$\sum_k |a_k|\cdot r^{k-1}$ o $\sum|a_k|r^k$

ha raggio di convergenza R.

$r<R \Rightarrow$ ok.

---

f è continua anche sugli z_0 con $|z_0|=R$?



Non è detto! Ma vale il Lemma di Abel

Lemma di Abel: Se $\sum a_k z_0^k$ è convergente, la

Inoltre $g(t) = \sum a_k (t z_0)^k$ definita per $t \leq 1$. è continua in $t = 1$

dim sugli appunti. $\square$

Es $f(z) = \sum \frac{z^k}{k!}$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}$$

Quanto vale R? $R = \frac{1}{\ell}$ $\ell = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$

$R = +\infty$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) \overset{?}{=} e^z$

$x \to 0$ $e^x \to 1$

$\cos(e^x + x)$ $e^x + x \to 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$t = e^x + x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \to 1$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t) \quad \cancel{4} \text{ sì per } t \to 0$$

$$\cos(e^x + x) = \cos(\underbrace{e^x + x - 1} + 1)$$

$$= \underbrace{\cos(e^x + x - 1)}_{\text{ok}} \cos 1 - \sin(e^x + x - 1) \sin 1$$

per $x \to 1$

$$\cos(x) = \cos 1 + (-\sin 1) \cdot (x-1) + \left(\frac{-\cos 1}{2}\right)(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$