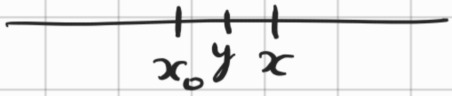
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 51 - 13.2.2023

Formula di Taylor (resto di Lagrange)

$f \in C^{n+1}$, P pol di Taylor per f di ordine n centrato in x_0

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \forall x \ \exists y$$



Esempio

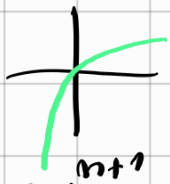
$$\sum \frac{1}{k} = +\infty \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}} \text{ è convergente.}$$

caso $x=-1$

$$= \ (*) \ \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}} \leftarrow \text{serie di potenze}$$

coefficienti: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \dots,\ a_k = \frac{1}{k}, \dots$

(*) è la serie di Taylor di



$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

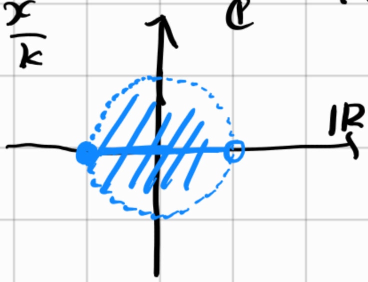
$$f(x) = \boxed{-\ln(1-x)} = \underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}}_{\text{Pol. di Taylor di } f(x) = -\ln(1-x)} + o(x^n)$$

Congettura $\displaystyle \underset{g(-1)}{\sum_{k\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}} = -\ln 2 \overset{f(-1)}{=} < 0$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Poniamo $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ congettura $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [-1, 1)$

$\sum \frac{x^k}{k}$



$R = \frac{1}{\ell}$ $\quad \ell = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$, $R = 1$.

$g(x)$ è definita per $x \in (-1, 1)$

g è analitica su $(-1,1)$. (somma di una serie di potenze)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

f e g hanno le stesse derivate in $x=0$.

(perché hanno gli stessi polinomi di Taylor).

Applichiamo la formula di Taylor con resto di Lagrange a f:

$f(x) = -\ln(1-x)$ $\qquad x_0 = 0$

$$f(x) = \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}}}_{\xrightarrow{n\to+\infty}\, g(x)} + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} x^{n+1}}}_{\downarrow ?\ 0} \;, \quad \text{con } y \in [0,x]$$

$= R_n(x)$ $\qquad [x,0]$ se $x<0$

$f(x) = -\ln(1-x)$

$f'(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$f''(x) = 1(1-x)^{-2}$

$f'''(x) = 2\cdot 1(1-x)^{-3}$

$f^{IV}(x) = 3\cdot 2\cdot 1(1-x)^{-4}$

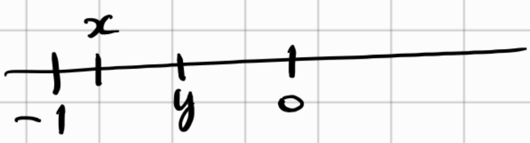
$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,(1-x)^{-n}$

$f^{(n+1)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)} = n!\,\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$

$x \in [-1, 1)$

$|f^{(n+1)}(y)| \le n!\,\frac{1}{|1-y|^{n+1}} \le n!$ $\qquad$ se $x<0$ $\quad y \in (x,0)$



Se $x<0$ $\quad$ (se $x>0$ $\quad f^{(n+1)}(y) \le \frac{n!}{|1-x|^{n+1}}$)

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} x^n \right| \le \frac{n!}{(n+1)!} |x|^n = \frac{|x|^n}{n+1} \longrightarrow 0$$

anche quando $x=-1$.

[Se $x \in [0,1)$

$$|R_n(x)| \le \frac{\frac{n!}{|1-x|^{n+1}}}{(n+1)!} x^n = \frac{x^n}{(n+1)\cdot(1-x)^{n+1}} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)(1-x)}$$

$$\frac{x}{1-x} \overset{?}{<} 1 \qquad x < 1-x \qquad 2x<1$$
$$x < \frac{1}{2}.$$]

Riesco a dire che $|R_n(x)| \to 0$ per $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.
per $n \to +\infty$

Significa che su $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ $\quad f(x) = g(x)$.
f è analitica.

$$-\ln(2) = f(-1) = g(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

▷

[In realtà $\ln(1+x)$ è analitica.]

[Sugli appunti: (Teorema serie binomiale)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)$$]

<u>Teorema</u> (criterio di analiticità) Sia $f \in C^\infty$ definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che per ogni $x_0 \in A$ esiste $\rho > 0$
$\exists M, L \in \mathbb{R}$ $\qquad \forall x \in [x_0-\rho, x_0+\rho]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \boxed{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq M \cdot L^n}$$

resto di Lagrange

$$\underline{\text{dim}} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Sia $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

$y \in (x_0, x) \subseteq (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$

dunque per ipotesi $\left|\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}\right| \leq M \cdot L^{n+1}$

$$|R_n(x)| \leq M \cdot L^{n+1} (x-x_0)^{n+1} \leq M \; L^{n+1} \cdot |x-x_0|^{n+1}$$

$$= M \left(L \cdot |x-x_0|\right)^{n+1}$$

$\longrightarrow 0$ se $|x-x_0| < \frac{1}{L}$.

La serie di Taylor converge a f nell'intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ con $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{L}, \rho\right\}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

$\square$

<u>Corollario</u> sin, cos sono analitiche grazie a questo criterio

$$\left(\text{Basta} \quad \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} << L^n. \right)$$

anche e^x funziona. $\quad |f^{(n)}(x)| \leq e^x \leq e^{x_0+\rho}$

se $x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$

$\square$

Sugli appunti: analiticità di molte funzioni elementari

Perché è interessante sapere che le funzioni elementari sono analitiche.

Ad esempio:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{(2k+1)}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}$$

(ci permette di dire che $\pi \in [3.14, 3.15]$).

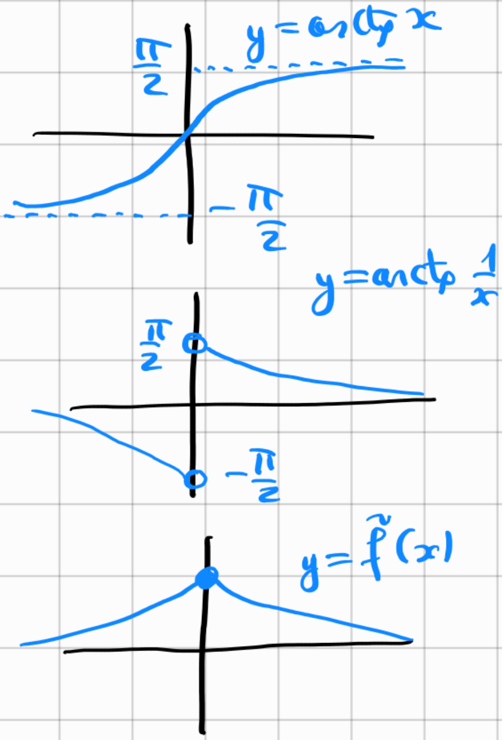
oppure

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}_{} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Gregory-Leibniz

ESERCIZIO TEST SETTIMANALE:

* Posso scrivere una formula di Taylor per $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, quando $x \to 0^+$



Poso $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{|x|} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$\tilde{f}$ è continua!

$\tilde{f}$ è derivabile?

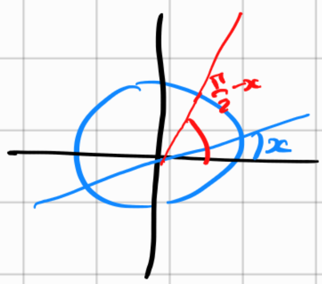
è derivabile due volte?

Oppure $\boxed{\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}$ se $x > 0$

già visto $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$

$g'(x) = 0$.

Geometricamente: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$



$$e - (1+x)^{\frac{1}{x}} = e - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e - e^{1 - \frac{x}{2} + \cdots}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

$$= e\left[1 - e^{-\frac{x}{2} + \cdots}\right]$$

$$e^{-\frac{x}{2}} = 1 + \left(-\frac{x}{2}\right) + o(x)$$