Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

21 giugno 2023

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - a_n^2 + a_n^3, \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare, se esiste, il limite della successione a_n.

Soluzione. La successione è definita dalla legge ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ con
$$f(x) = x - x^2 + x^3.$$
Risulta $f'(x) = 1 - 2x + 3x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque la funzione f è strettamente crescente. I punti fissi di f, ovvero le soluzioni di $f(x) = x$ si trovano facilmente e sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Si osserva infine che essendo f strettamente crescente se $x < 0$ si ha $f(x) < f(0) = 0$ e dunque l'intervallo $(-\infty, 0)$ è invariante, se $0 \leq x < 1$ si ha $0 = f(0) < f(x) \leq f(1) = 1$ e dunque l'intervallo $[0, 1)$ è invariante, se $x > 1$ si ha $f(x) > f(1) = 1$ e dunque anche l'intervallo $(1, +\infty)$ è invariante. Risolvendo la disequazione $f(x) > x$ si trova $x > 1$.

Dunque se $\alpha > 1$ si ha $a_n > 1$ per ogni n, e a_n è crescente. Dunque a_n ha limite. Se il limite fosse finito dovrebbe essere un punto fisso di f, ma ciò non può essere perché $a_n \geq \alpha > 1$. Dunque $a_n \to +\infty$.

Se $\alpha = 1$ si ha ovviamente $a_n = 1$ per ogni n e dunque il limite di a_n è 1.

Se $\alpha \in [0, 1)$ si ha $a_n \in [0, 1)$ per ogni n e visto che su tale intervallo $f(x) < x$ la successione a_n risulta essere decrescente. Dunque la successione converge ad un punto fisso di f che non può che essere 0 visto che $a_n \leq \alpha < 1$ per ogni n.

Se $\alpha < 0$ si ha $a_n < 0$ per ogni n e visto che $f(x) < x$ la successione a_n risulta essere decrescente. Deve dunque avere limite, ma il limite non può essere finito perché non ci sono punti fissi negativi. Dunque il limite è $-\infty$. $\square$

2. (a) Verificare che per ogni $x > 0$ si ha

$$e^{4x^2} - \sqrt{1+8x^2} > 0.$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ esiste ed è finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{4\cos(3x^\alpha) - 9\cos(2x^\alpha) + 5}{e^{4x^2} - \sqrt{1+8x^2}} dx.$$

Soluzione. Visto che e^x è una funzione strettamente convessa sappiamo che il suo grafico sta sopra la retta tangente in $x = 0$. Dunque per $x \neq 0$ si ha

$$e^x > 1 + x \qquad \text{e dunque} \qquad e^{4x^2} > 1 + 4x^2.$$

Viceversa $\sqrt{(1+2x)}$ è concava e dunque il suo grafico sta sotto la retta tangente in $x = 0$. Dunque per $x > 0$ si ha

$$\sqrt{1+2x} < 1 + x \qquad \text{e dunque} \qquad \sqrt{1+8x^2} < 1 + 4x^2.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianza si ottiene, come richiesto,

$$e^{4x^2} - \sqrt{1+8x^2} > 0.$$

Per quanto riguarda l'integrale osserviamo che è un integrale improprio bilaterale in $(0, +\infty)$. I punti 0 è $+\infty$ sono gli unici punti *cattivi* visto che negli altri punti la funzione integranda è definita e continua (per il punto precedente il denominatore non si annulla mai). s Sia $f(x)$ la funzione integranda. In un intorno di $+\infty$ la funzione cambia segno frequentemente, dunque proviamo ad utilizzare il criterio di convergenza assoluta. Si ha

$$|f(x)| \leq \frac{4+9+5}{e^{4x^2} - \sqrt{1+8x^2}} \ll \frac{1}{e^{2x^2}} \ll e^{-x}.$$

Sappiamo che e^{-x} ha integrale convergente in un intorno di $+\infty$ dunque l'integrale dato è a sua volta assolutamente convergente in un intorno di $+\infty$.

Studiamo ora il comportamento di $f(x)$ per $x \to 0$ utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2), \\
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}
e^{4x^2} - \sqrt{1+8x^2} &= 1 + 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - \big(1 + 4x^2 - 8x^4 + o(x^4)\big) \\
&= 16x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
4\cos(3x^\alpha) - 9\cos(2x^\alpha) + 5 &= 4\left(1 - \frac{9}{2}x^{2\alpha} + \frac{27}{8}x^{4\alpha} + o(x^{4\alpha})\right) \\
&\quad - 9\left(1 - 2x^{2\alpha} + \frac{2}{3}x^{4\alpha} + o(x^{4\alpha})\right) + 5 \\
&= \frac{15}{2}x^{4\alpha} + o(x^{4\alpha}).
\end{aligned}$$

Dunque risulta, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\frac{15}{2}x^{4\alpha} + o(x^{4\alpha})}{16x^4 + o(x^4)} \\
&\sim \frac{15}{32}x^{4\alpha-4}
\end{aligned}$$

In particolare la funzione $f(x)$ è positiva in un intorno destro di 0 perché asintotica ad una funzione positiva. Possiamo quindi applicare il criterio di convergenza asintotica per dire che il nostro integrale è convergente, in un intorno di 0^+, se e solo se la funzione $x^{4\alpha-4}$ ha integrale convergente in tale intorno. E' noto che questo accade se e solo se $4\alpha - 4 > -1$ ovvero $\alpha > \frac{3}{4}$.

Dunque l'integrale dato è convergente se e solo se $\alpha > \frac{3}{4}$. $\square$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x \cdot u'(x) + u(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{2x+1}}, \\ u(40) = \frac{\ln 2}{20} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine non omogenea con coefficienti non costanti e in forma non normale. L'equazione è definita solamente se $x > -1/2$ e $x \neq 0$. Visto però che il dato iniziale è dato nel punto $x = 40$ la soluzione andrà cercata nell'intervallo $x > 0$. Su tale intervallo l'equazione può essere portata in forma normale (dividendo per $x \neq 0$) e dunque il teorema di esistenza globale ci dice che la soluzione sarà definita su tutto l'intervallo $x > 0$ che è quindi l'intervallo massimale di esistenza.

Queste equazioni si possono risolvere trovando un fattore integrante in modo che il lato sinistro sia la derivata di un prodotto. In questo caso si osserva però che il lato sinistro è già la derivata di un prodotto, infatti: $(x \cdot u(x))' = x \cdot u'(x) + u(x)$ e dunque non c'è alcun bisogno di determinare il fattore integrante.

Si tratta ora di trovare una primitiva del lato destro. Il lato destro è una funzione razionale di $\sqrt[4]{2x+1}$ e dunque la sostituzione $t = \sqrt[4]{2x+1}$ è risolutiva. Si ha $t^4 = 2x + 1$ da cui $x = \frac{t^4-1}{2}$ e dunque $dx = 2t^3\,dt$. Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{2x+1}}\,dx = \int \frac{2t^3}{t^2 - t}\,dt = \int \frac{2t^2}{t-1}\,dt = \dots$$

Svolgendo la divisione tra polinomi si trova $2t^2 = (t-1)(2t+2) + 2$ da cui

$$\begin{aligned} \dots &= \int \left(2t + 2 + \frac{2}{t-1}\right) dt \\ &= t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + c \\ &= \sqrt{2x+1} + 2\sqrt[4]{2x+1} + 2\ln(\sqrt[4]{2x+1} - 1) + c. \end{aligned}$$

Dunque

$$x \cdot u(x) = \sqrt{2x+1} + 2\sqrt[4]{2x+1} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x+1} - 1\right| + c.$$

Per $x = 40$ si ha $t = 3$ e quindi la condizione $u(40) = \frac{\ln 2}{20}$ diventa

$$40 \cdot \frac{\ln 2}{20} = 9 + 6 + 2 \ln 2 + c$$

da cui $c = -15$.

In definitiva la soluzione è

$$u(x) = \frac{\sqrt{2x+1} + 2 \cdot \sqrt[4]{2x+1} + 2 \ln(\sqrt[4]{2x+1} - 1) - 15}{x}.$$

$\square$