(I) Forme quadratiche e ricerca di massimi/minimi locali (globali) di una funzione.

$$f(h) := h^T M h = (Mh)\cdot h = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} m_{ij} h_i h_j$$

$h \in \mathbb{R}^d$

forma quadratica.

$M = (m_{ij})_{i,j=1}^{d}$ può essere considerata simmetrica.

·) $f(0) = 0$

·) $f(th) = t^2 f(h)$.

$t \in \mathbb{R}$

$$f(h) > 0 \quad \forall h \neq 0 \qquad (\text{"}f \text{ definita positiva"})$$

$$\Updownarrow$$

per autovalori

$$\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$$

$$\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, d.$$

$$\Updownarrow$$

criterio di Sylvester

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2d} \\ m_{31} & m_{32} & & \cdots & m_{3d} \\ \vdots & & & & \\ m_{d1} & & \cdots & & m_{dd} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\{m_{11}\}}{m_{11} = \det \underset{\shortparallel}{M_1}} > 0 \qquad \det M_2 > 0 \quad \dots \qquad \det \underset{\substack{\shortparallel \\ M}}{M_d} > 0$$

$$f(h) < 0 \quad \forall h \neq 0 \qquad (\text{"}f \text{ definite negative"})$$

$$\Updownarrow$$

$$\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}, \quad \lambda_j < 0 \ \forall j = 1, \dots, d$$

$$\Updownarrow$$

$$m_{11} < 0, \ \det M_2 > 0, \ \det M_3 < 0 \dots$$

Caso $d = 2$ $\qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^2 - (\underbrace{a+c}_{= \operatorname{Tr} M})\lambda + \underbrace{ac - b^2}_{= \det M} = 0.$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{Tr} M)\lambda + (\det M) = 0.$$

(!) $\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = \det M \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Tr} M. \end{cases}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow \det M > 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow \operatorname{Tr} M > 0$

$\qquad \operatorname{Tr} M = a + c > 0$

Ma $ac - b^2 > 0$

$\qquad ac - b^2 = \det M \qquad ac > b^2 > 0$

$\underline{a > 0 \quad \det M > 0.}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

traccia

(trace)

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \Rightarrow \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

$$\mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n .$$

Massimi/minimi di una $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
aperto

•) $f \in C^1(A)$ e $x_0 \in A$ è un punto di massimo/minimo locale,

allora
$$\nabla f(x_0) = 0$$

•). Se $f \in C^2(A)$ e $x_0 \in A$ è tale che $\nabla f(x_0) = 0$, allora

•) se $\mathrm{Hess} f(x_0)$ è definita positiva, allora >0 x_0 è un punto di minimo locale forte

•). se $\mathrm{Hess}\, f(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 è pt. di massimo loc. forte

•) se $\mathrm{Hess} f(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ x_0 non è né di massimo, né di minimo

punto di sella

Esempio 1. $f(x,y) := 3x^2 + y^2 - x^3 y$.

$A = \mathbb{R}^2 \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1) $\nabla f(x,y) = \left(6x - 3x^2 y, \underline{2y - x^3}\right) = 0$.

$$\begin{cases} 6x - 3x^2 y = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2 - xy = 0 \end{array}\right. \\ x^3 = 2y \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ \begin{cases} xy = 2 \\ x^3 = 2y \end{cases} \end{array}\right.$$

$y = \dfrac{2}{x} \Rightarrow x^3 = \dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

1) $x=y=0$.

2) $x=\sqrt{2}$, $y=\dfrac{2}{x}=\sqrt{2}$.

3) $x=-\sqrt{2}$, $y=\dfrac{2}{x}=-\sqrt{2}$.

$(0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ – punti critici (stazionari) di f.

•) $\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6-6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$

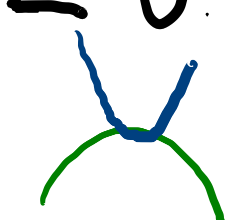
$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0.$

punto di minimo locale forte.

•) $\text{Hess} f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ indefinita

$\det \text{Hess} f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = -6\cdot 2 - 36 < 0.$

$(\sqrt{2},\sqrt{2})$ punto di sella.



•) $\text{Hess} f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ indefinita

$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ punto di sella.

<u>Esempio 2</u>. $f(x,y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Punti critici (stazionari):

$\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 12xy^2,\ 4y^3 - 12yx^2 \right) = 0$

$$\begin{cases} 4x^3 - 12xy^2 = 0 \\ 4y^3 - 12yx^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\,(x^2 - 3y^2) = 0 \\ y\,(y^2 - 3x^2) = 0 \end{cases}$$

•) $x = 0,\ y = 0$

•) $x^2 = 3y^2$, $y^2 = 3x^2 = 9y^2 \Rightarrow 8y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

$(0,0)$ è un unico punto critico (stazionario) di f.

$\cdot)$ $$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy \\ -24xy & 12y^2 - 12x^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nessuna conclusione ...

"semidefinita positiva"

$\cdot)$ $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $f(0,0) = 0$.

$f(x,0) = x^4$.

$\cdot)$ $x = y \Rightarrow f(x,x) = x^4 - 6x^4 + x^4 =$

$= -4x^4$

$(0,0)$ è un punto di sella.

II Curve e integrali curvilinei.

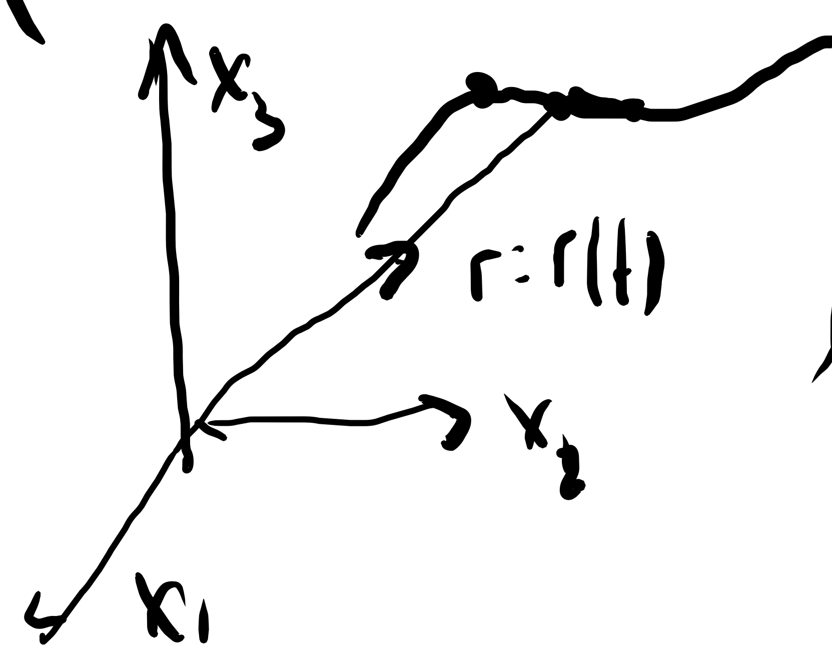
$$r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$$

$$r = r(t)$$

$\dot{r}(t)$ - velocità (istantanea) all'istante t.

è tangente alla curva.

$|\dot{r}(t)|$ - velocità (istantanea) assoluta

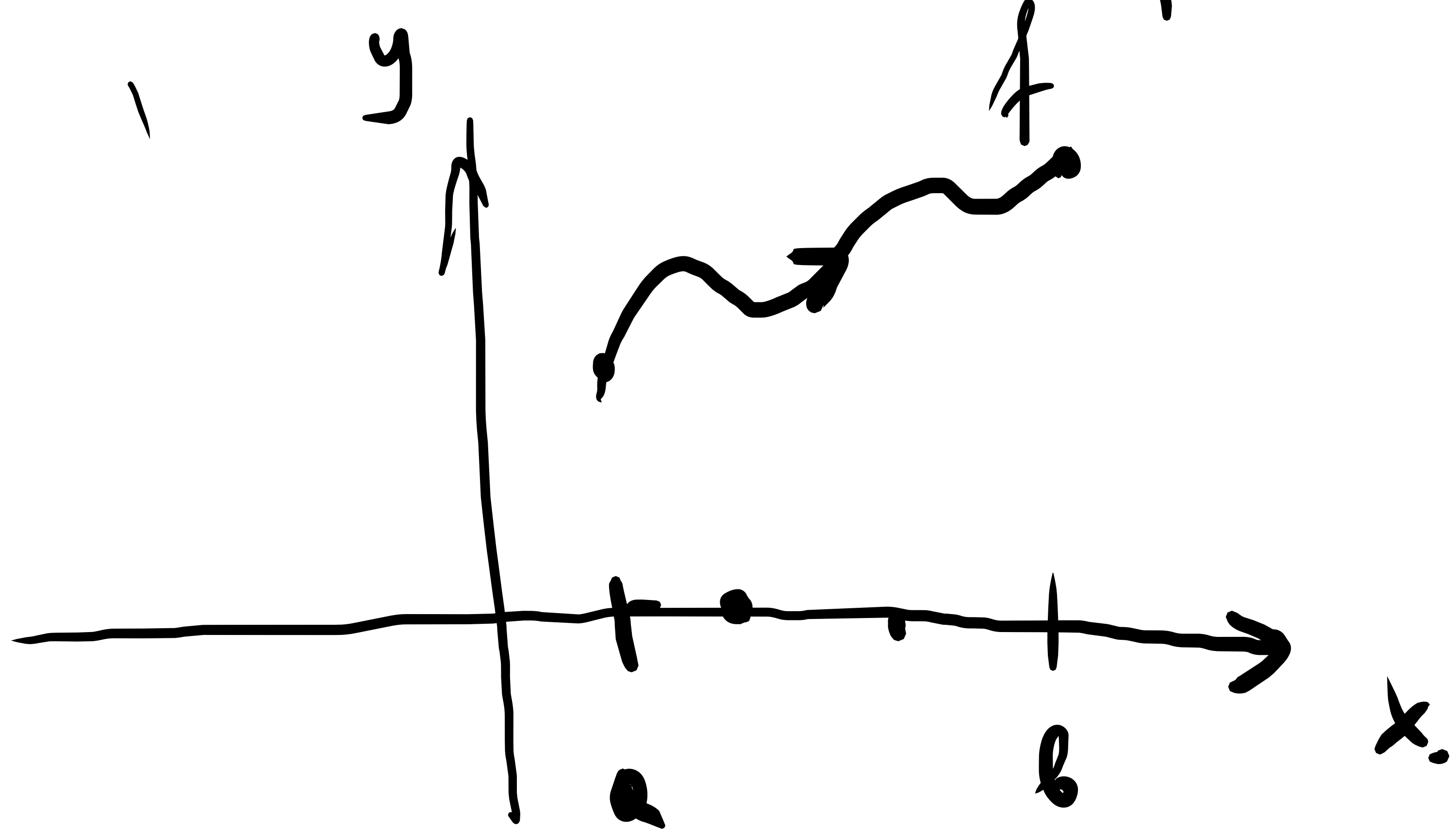


$$\Delta s \approx |\dot{r}(t)|\, \Delta t.$$

$$\ell(r) := \int_I |\dot{r}(t)|\, dt$$

Esempio: $d = 2$, $r(x) := (x, f(x))$,

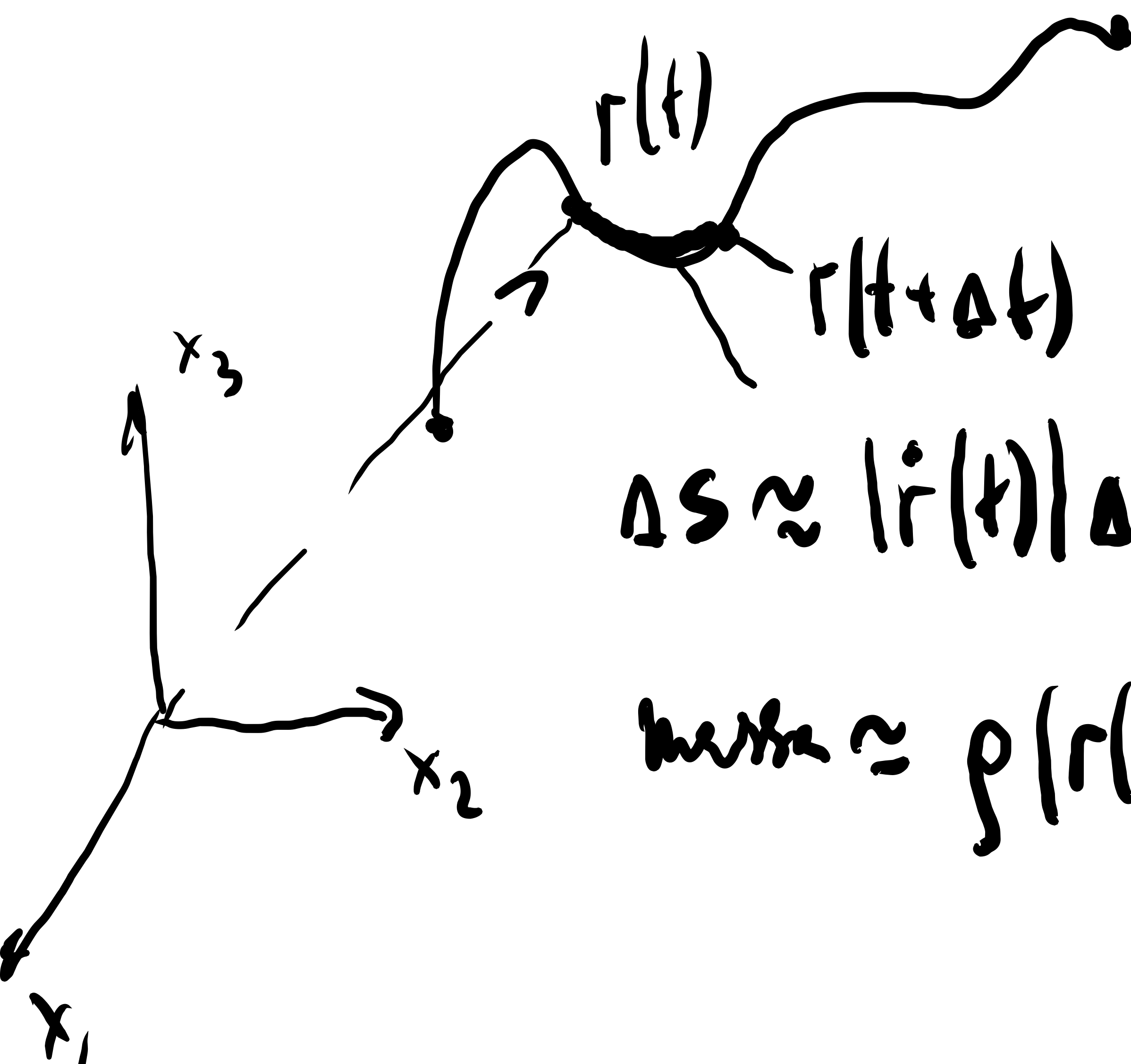
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$



$$|\dot{r}(t)| = \left| \frac{d}{dt}\big(t, f(t)\big) \right| = \left| (1, f'(t)) \right| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$$

$$\boxed{\ell(r) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt.}$$

$t \in [a,b]$



$\rho(r)$ – densità nel punto r (lineare)

massa totale del filo con densità $\rho = \rho(r)$

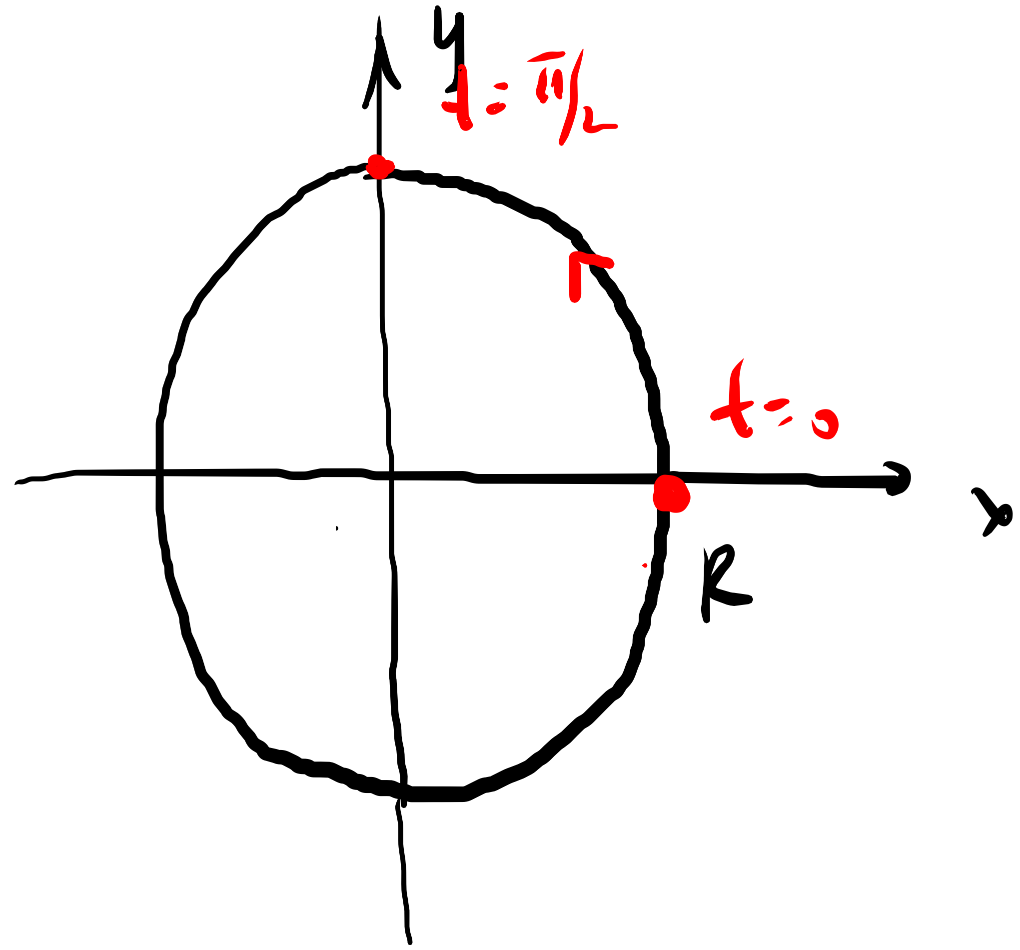
$\Delta s \approx |\dot r(t)|\Delta t$

massa $\approx \rho(r(t))\Delta s = \rho(r(t))\,|\dot r(t)|\,\Delta t.$

$$\text{Massa totale} = \int_a^b \rho(r(t))\,|\dot r(t)|\,dt.$$

integrale curvilineo (di 1ma specie) di ρ lungo la curva r.

Esempio



$$x^2+y^2=R^2$$

$$\rho(x,y) := |x|.$$

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi).$$

$$r(t) = (x(t), y(t))$$
$$\dot r(t) = (\dot x(t), \dot y(t))$$
$$|\dot r|(t) = \left(\dot x^2(t)+\dot y^2(t)\right)^{1/2}.$$

$$\int_0^{2\pi} |x(t)|\sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)}\,dt =$$
$$= R^2\int_0^{2\pi}|\cos t|\,dt = 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt =$$
$$= 2R^2 \sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4R^2.$$

Risposta: Massa totale della circonf. è $4R^2$

$r = r(t) \in \mathbb{R}^d \qquad t \in [a, b]$

curva parametrizzata.

$\varphi : [c, d] \to [a, b]$ invertibile, derivabile.

$t = \varphi(\tau) \Rightarrow \qquad r = r(t) = r(\varphi(\tau))$

$\tau \in [c, d] \longmapsto \tilde{r}(\tau) := (r \circ \varphi)(\tau) \in \mathbb{R}^d$

è un'altra curva parametrica.

$r = r(t)$	$\tilde{r} = \tilde{r}(t)$
$\dot{r}(t)$	$\tilde{r}'(\tau) = \dot{r}(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) =$ $= \dot{r}(t)\boxed{\varphi'(\tau)}$

Def.

1) Se $\varphi'(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [c, d]$,
allora le curve $r(\cdot)$ e $\tilde{r}(\cdot)$ si chiamano **equivalenti**.

2) Se $\varphi'(\tau) \leq 0 \quad \forall \tau \in [c, d]$
allora si dice che $\tilde{r}(\cdot)$ e $r(\cdot)$ si differiscono di un cambio di orientazione.

Teorema

$$\int_a^b \rho(r(t))\,|\dot r(t)|\,dt = \int_c^d \rho(\tilde r(\tau))\,|\tilde r'(\tau)|\,d\tau,$$

se $\quad t = \varphi(\tau), \quad \varphi : [c,d] \to [a,b]$

derivabile, invertibile (monotona)

$$\tilde r(\tau) = r(\varphi(\tau)).$$

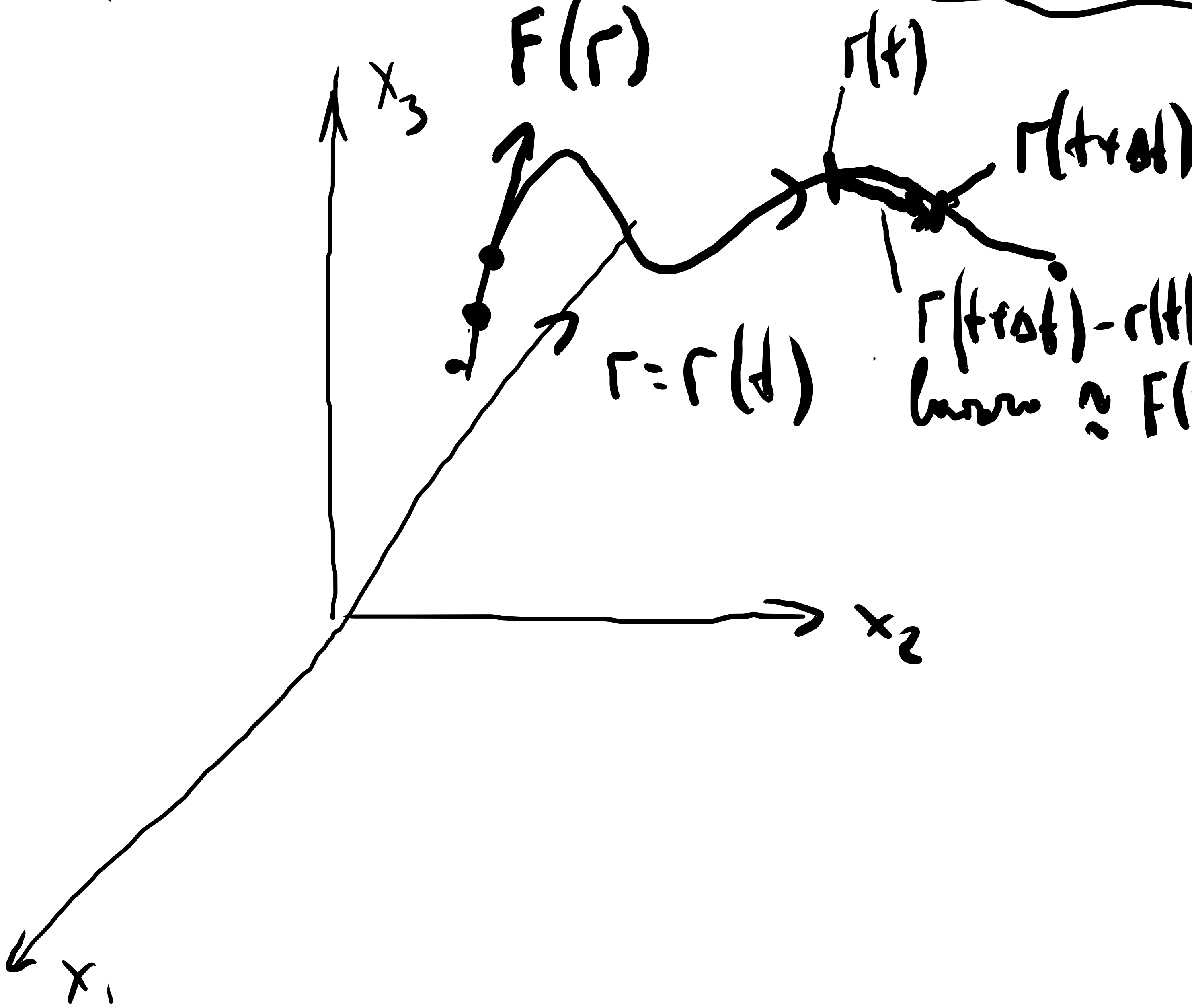
Dim. (per il caso φ crescente, ossia $\varphi'(\tau) \geq 0$).

$$\int_a^b \rho(r(t))\,|\dot r(t)|\,dt \underset{t=\varphi(\tau)}{=} \int_c^d \rho(r(\varphi(\tau)))\,|\dot r(\varphi(\tau))|\,\varphi'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_c^d \tilde r(\tau)\,|\tilde r'(\tau)|\,d\tau \,, \quad \text{q.e.d.}$$

$$\dot r(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) = \tilde r'(\tau)$$

Lavoro di una forza lungo la curva.



$t \in [a,b]$

$r(t+\Delta t) - r(t) \approx \dot{r}(t)\,\Delta t$

lavoro $\approx F(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\,\Delta t$

$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$F(r)$ e forza applicata nel punto della curva con coordinate r.

Lavoro $\quad A = \int_a^b F(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\,dt$

integrale curvilineo di seconda specie.

$$\int_a^b \underbrace{F(r(t))}_{\in \mathbb{R}^d} \cdot \underbrace{\dot r(t)}_{\in \mathbb{R}^d}\, dt = \int_a^b F_1(r(t))\dot x_1(t)\,dt + \int_a^b F_2(r(t))\dot x_2(t)\,dt + \dots + \int_a^b F_d(r(t))\dot x_d(t)\,dt$$

$$= \int_a^b F_1(r(t))\,dx_1(t) + \int_a^b F_2(r(t))\,dx_2(t) + \dots + \int_a^b F_d(r(t))\,dx_d(t)$$

$$=: \int_{r(\cdot)} \underbrace{F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \dots + F_d\,dx_d}_{\text{1-forma differenziale (associata alla forma } F)}$$

$$F(r) = (F_1(r), \dots, F_d(r))$$

$$\dot r(t) = (\dot x_1(t), \dots, \dot x_d(t))$$

Esempi di calcolo.

$\underline{1°}$ $d=3$ $[(1,2,3),(2,5,1)]$.

$$\gamma(t): \begin{cases} x_1(t) = 2t + 1(1-t) = t+1 & t \in [0,1] \\ x_2(t) = 5t + 2(1-t) = 3t+2 \\ x_3(t) = 1t + 3(1-t) = -2t+3 \end{cases}$$

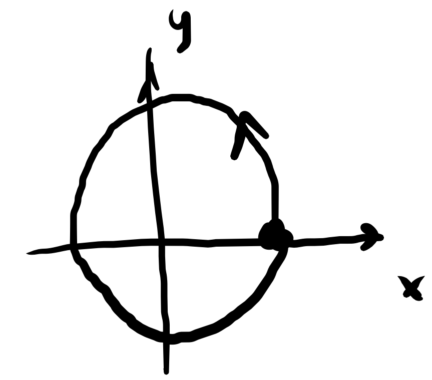
(Oss. $[A,B]$ si può sempre parametrizzare come $\gamma(t) = (1-t)A + tB$, $t \in [0,1]$)

$F = e_1$

$$\int_\gamma F_1\,dx_1 + \cancel{F_2\,dx_2} + \cancel{F_3\,dx_3} = \int_\gamma F_1\,dx_1 =$$

$$= \int_0^1 1 \cdot d(t-1) = 1.$$

$\underline{2^\circ}|$ $\quad d=2$, C: $x(t) = \cos t$
$\qquad\qquad y(t) = \sin t$,
$\qquad\qquad t \in [0, 2\pi]$.



$$F(x,y) = (y, x)$$

$$\int_C F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 = \int_C y\,dx + x\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t\, d\cos t + \int_0^{2\pi} \cos t\, d\sin t =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = 0$$

Teorema (!) $\int_{\Gamma(\cdot)} F_1 dx_1 + \dots + F_d dx_d$ non cambia

con riparametrizzazione **equivalente**

della curva Γ ossia

$$\int_a^b F(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt = \int_c^d F(\tilde{r}(\tau)) \cdot \tilde{r}'(\tau)\, d\tau,$$

se $t = \varphi(\tau)$, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$

crescente (!), derivabile, invertibile

$$\tilde{r}(\tau) = r(\varphi(\tau)).$$

Inoltre, se φ è decrescente, derivabile, invertibile.

$$\int_a^b F(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt = - \int_c^d F(\tilde{r}(\tau)) \cdot \tilde{r}'(\tau)\, d\tau.$$