ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 11 — 11.10.2023

se $x, y \in \mathbb{R}$

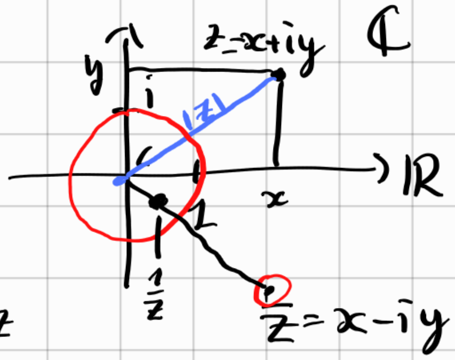
$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Esercizi di riscaldamento. Calcolare:

$$|i-1|, \quad \frac{10}{i-3}, \quad (4+3i)^2, \quad |4+3i|, \quad |(4+3i)^2|$$

$$\left[\ \sqrt{2}, \quad -i-3, \quad 7+24i, \quad 5, \quad 25\ \right]$$

NUMERI COMPLESSI



$\mathbb{C}$ è un campo $+, \cdot, -, /, \bar{z}, |z|$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad ⚠ \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

Significato geometrico della moltiplicazione.

$z = a+ib$

$w = \alpha + i\beta$

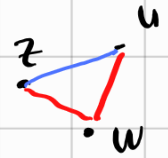
$[a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}]$

$$\begin{aligned}
|z\cdot w|^2 &= |(a+ib)(\alpha+i\beta)|^2 \\
&= |a\alpha - b\beta + i(b\alpha + a\beta)|^2 \\
&= (a\alpha - b\beta)^2 + (b\alpha + a\beta)^2 \\
&= a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \cancel{- 2a\alpha b\beta} + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 \cancel{+ 2b\alpha a\beta} \\
&= a^2(\alpha^2+\beta^2) + b^2(\beta^2+\alpha^2) \\
&= (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) \\
&= |z|^2 \cdot |w|^2 .
\end{aligned}$$

(⚠ non è un prodotto scalare)

$$\downarrow$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

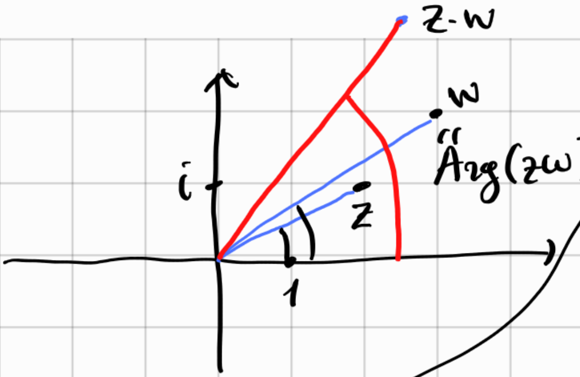


Altre proprietà del modulo:

$$|z+w| \le |z| + |w| \qquad \text{(convessità).}$$

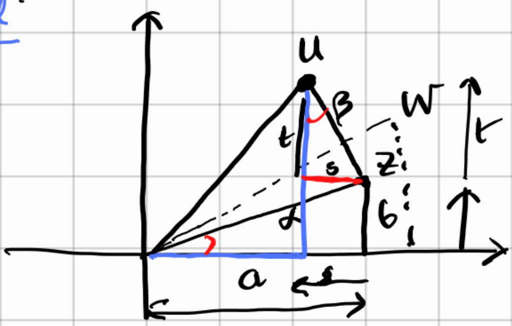
$$|z-u| \le |z-w| + |w-u| \qquad \text{(disug. triangolare)}$$

$\uparrow$ distanza tra z e u



"$\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)$"

Dimostrazione



$z = a + ib$

$w = \alpha + i\beta$

supponiamo: $\alpha = |z|$

Devo dimostrare che u è multiplo reale positivo di $z \cdot w$.

$$u = a - s + i(b+t)$$

$$= a - \frac{b\beta}{\alpha} + i\left(b + \frac{a\beta}{\alpha}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\beta} = \dfrac{b}{\alpha} \\ \dfrac{t}{\beta} = \dfrac{a}{\alpha} \end{cases}$$

$$\alpha u = \alpha a - b\beta + i(b\alpha + a\beta) = (a+ib)\cdot(\alpha + i\beta) = z \cdot w \quad \square$$

Esempio $f(z) = i \cdot z$

$\mathrm{Arg}\, i$ = angolo retto

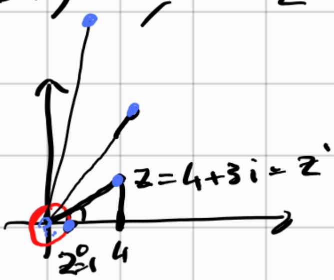
$|i| = 1$.

f è la rotazione di $90°$ in senso antiorario.

Es. $i^{10} = -1$ $\quad i^4 = (-1)^2 = 1$.

Esempio 2 $z = (4+3i)$, $\quad z^n$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

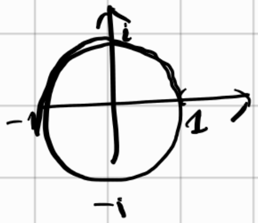


$|z| = 5$

Esempio 3 Se $|z|=1$ $\quad |z^n| = \underbrace{|z|\cdots\cdots|z|}_{n} = |z|^n = 1.$

$$U \doteq \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\} = \{\text{complessi unitari}\}.$$

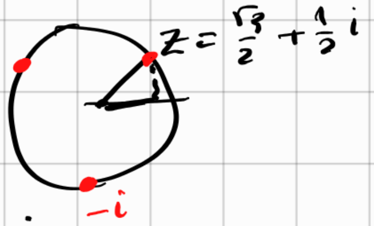
è un gruppo moltiplicativo!



Es $\quad z = \dfrac{4+3i}{5}$

U rappresenta l'insieme degli "angoli" dove la somma (degli angoli) è il prodotto (dei numeri complessi).

$$4\cdot\perp = i\cdot i\cdot i\cdot i = i^4 = 1$$



$\dfrac{\perp}{3} = 30° \cong z$ t.c. $z^3 = i$

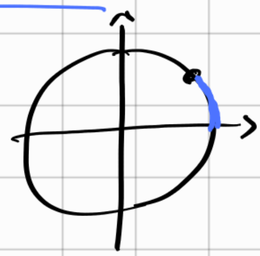
$$z^3 - i = 0 \qquad (-i)^3 = i$$

$$z^3 - (-i)^3 = (z-(-i))\cdot\left(z^2+(-i)z+(-i)^2\right) =$$

$$= (z+i)(z^2 - iz - 1) \qquad \left[a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

$$z_{1,2} = \frac{i\pm\sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



Sin e Cos di un angolo geometrico sono: parte reale e parte immaginaria del numero complesso $z\in U$ che rappresenta l'angolo.

Ma noi vogliamo definire $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ dove θ è la misura dell'angolo ($\mathbb{R}$)

Come si misura un angolo? Devo trovare:

$$\begin{cases} \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow U \\ \theta \longmapsto z \\ 0 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto u \quad \text{unità arbitraria } u \in U \\ \qquad\qquad (\text{ad esempio } u \cong 1^\circ) \\ \boxed{\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)} \\ (*) \ \varphi \text{ è localmente "crescente"} \end{cases}$$

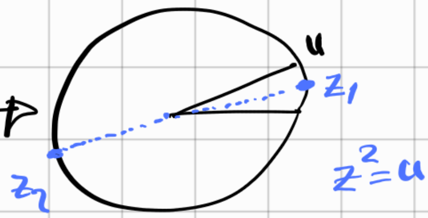
Es. Fissato $\varphi(1) = u$

$\varphi(2) = u^2$

$\vdots$

$\varphi(n) = u^n$

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = z_1$



$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \dots$

$\vdots$

$\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2$

$\vdots$

Purtroppo su U (come su $\mathbb{C}$) non c'è un ordinamento ma c'è un ordinamento locale:

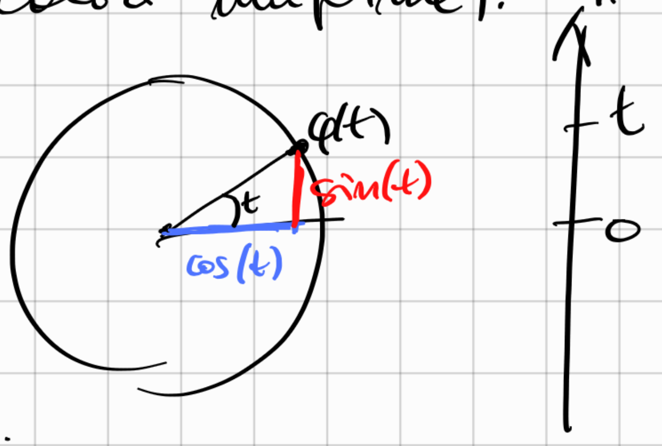
$z > w$
$\Updownarrow$
$\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}\, w$
$\Updownarrow$
$\mathrm{Im}\, z > \mathrm{Im}\, w$

Si potrebbe fare un teorema di isomorfismo "locale".

Data $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow U$ con le proprietà di sopra.

Posso definire $\begin{cases} \cos(t) = \mathrm{Re}\,\varphi(t) \\ \sin(t) = \mathrm{Im}\,\varphi(t) \end{cases}$

($\varphi(t)$ è il moto circolare uniforme).



$$\cos(0) = \mathrm{Re}\,\varphi(0) = \mathrm{Re}\,1 = 1.$$
$$\sin(0) = \mathrm{Im}\,\varphi(0) = \mathrm{Im}\,1 = 0.$$
$$\cos(\perp) = \mathrm{Re}\,\varphi(\perp) = \mathrm{Re}\,i = 0$$
$$\sin(\perp) = \mathrm{Im}\,\varphi(\perp) = \mathrm{Im}\,i = 1$$

$$\cos(30^\circ) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (vedi esercizio)
$$\sin(30^\circ) = \mathrm{Im}\left(\quad " \quad \right) = \frac{1}{2}.$$

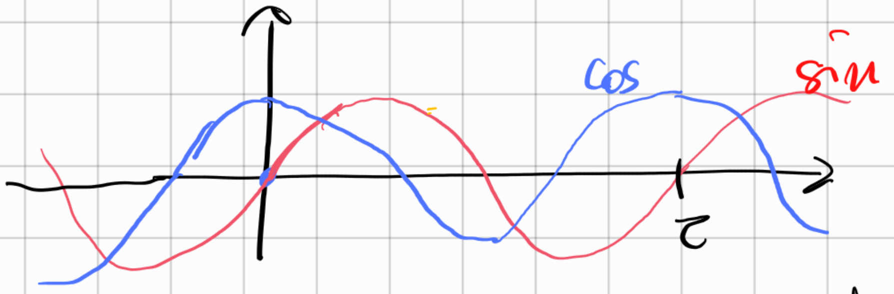
Formule di addizione

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{Re}\left(\varphi(\alpha+\beta)\right) = \mathrm{Re}\left(\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)\right) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$\varphi(\alpha) = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$\varphi(\beta) = \cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}_{\mathrm{Re}\left(\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)\right)} + i\left(\underbrace{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha}\right)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \mathrm{Im}\left(\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)\right) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha.$$



Esiste $\tau > 0$ minimo tale che $\varphi(\tau) = 1$

τ = angolo fisso

$$\varphi(\tau+\alpha) = \varphi(\tau)\cdot\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)$$

φ è τ-periodica

Esponenziale complesso

$z = x+iy$, $\qquad \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = 2^{x}\cdot\varphi(y) = 2^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Osservate $\qquad f(z+w) = f(z)\cdot f(w)$

$$f(z+w) = f(a+x+i(b+y))$$

$w = a+ib$

$$= 2^{a+x}\cdot\varphi(b+y)$$

$$= 2^{a}\cdot 2^{b}\cdot\varphi(b)\cdot\varphi(y)$$

$$= 2^{a}\varphi(b)\cdot 2^{b}\varphi(y) = f(w)\cdot f(z) \qquad \square$$