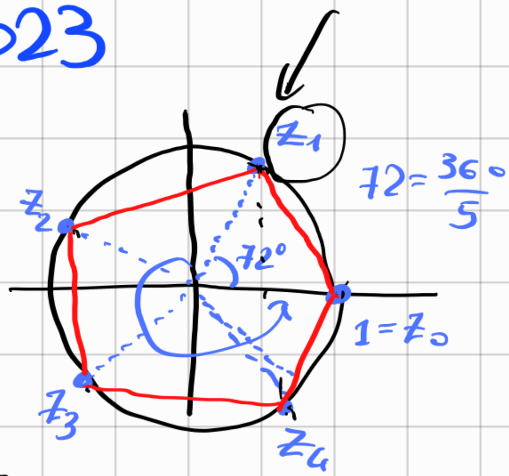
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 12 — 16.10.2023

Test settimanale risolvere: $z^5 = 1$

$$|z^5| = |1| = 1$$
$$|z^5| = |z|^5 \qquad |z| = 1$$



$z^5 = 1$

$$(z^2)^5 = (z^5)^2 = 1^2 = 1$$

$$\begin{cases} z^5 = 1 \\ w^5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (z \cdot w)^5 = z^5 \cdot w^5 = 1 \cdot 1 = 1.$$

In generale le soluzioni di $z^n = c$ $\quad c \in \mathbb{C}$ si dispongono sui vertici di un n-agono regolare con centro l'origine.

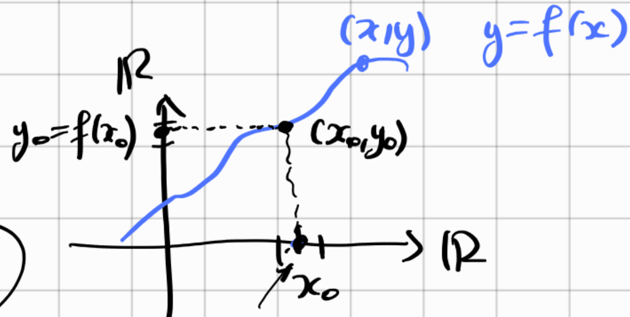
CONTINUITA'

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{array}\right]$$

Se $x_0 \in A$ diremo che f è continua in x_0 se:

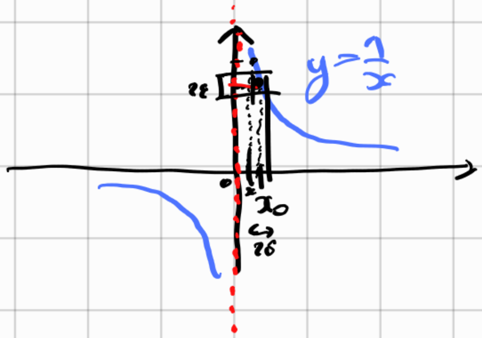
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{\forall x \in A} \Rightarrow \boxed{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$



$x_0 \pm \delta$

$y_0 \pm \varepsilon$

Diremo che f è continua se $\forall x_0 \in A$ f è continua in x_0.



Teorema $f(x)=\frac{1}{x}$ è continua.

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$

dim $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. $f(x)=\frac{1}{x}$ è continua in x_0

obiettivo: $|f(x)-f(x_0)| \overset{?}{<} \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| \overset{?}{<} \varepsilon \qquad x \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|x_0-x|}{|x\cdot x_0|} < \varepsilon \quad \uparrow$$

non deve essere troppo piccolo.

$|x_0-x| = |x-x_0| < \delta$ ☺

$|x\cdot x_0| > \frac{|x_0|^2}{2}$ (*)

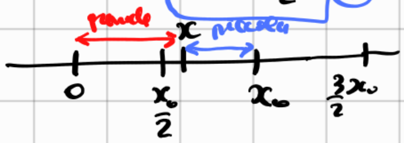
$\|$

$|x|\cdot|x_0| > \frac{|x_0|^2}{2}$

$|x| > \frac{|x_0|}{2}$

$\Uparrow$

se $\boxed{\delta < \frac{|x_0|}{2}}$ ① $\qquad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$



$$\left(|x-x_0| < \varepsilon\cdot|x\cdot x_0|\right)$$

$$\frac{|x_0-x|}{|x\cdot x_0|} \underset{(*)}{<} \frac{\delta}{\frac{|x_0|^2}{2}} \overset{?}{<} \varepsilon \quad \text{sì se ②.}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\delta < \frac{|x_0|^2\varepsilon}{2}} \ ②$$

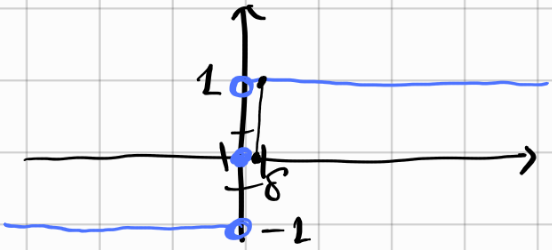
$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta = \min\left\{\frac{|x_0|^2\varepsilon}{2}, \frac{|x_0|}{2}\right\} > 0 : \forall x \neq 0 :$$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Esercizio 🏠 Dimostrare, con la definizione, che $f(x)=\sqrt{x}$ è continua.

Esempio $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ non è continua.

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



f non è continua in $x_0 = 0$

$\neg\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x = \frac{\delta}{2}$

$f(x) = 1 \geq \varepsilon = 1.$ $\square$

Osservazione $f(x) = \frac{x}{|x|}$ è continua!

Esercizio $f(x) = |x|$ è continua.

$g(x) = x$ è continua.

Teorema: Se f e g sono funzioni continue in x_0:

$(g(x_0) \neq 0)$

$f+g,\ f \cdot g,\ f-g,\ \frac{f}{g},\ -g,\ |g|,\ g^n,$

e $\boxed{h \circ g}$ se h è continua in $y_0 = g(x_0)$

sono tutte funzioni continue in x_0.

Esempio La funzione:

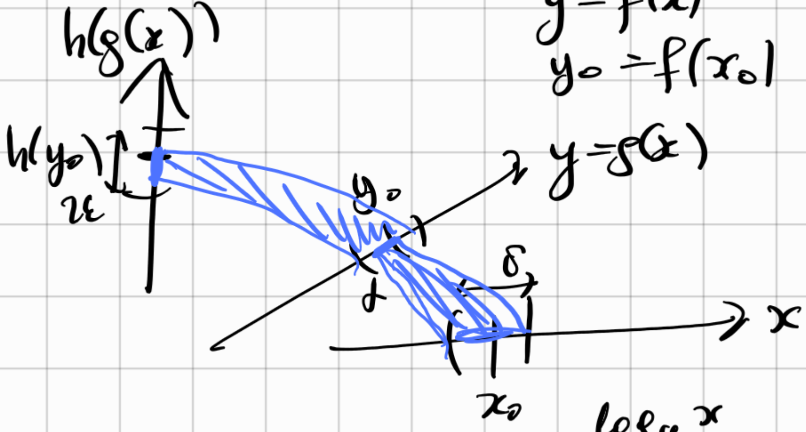
$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x - x^2}}{\sqrt{\sin(x^2+1)}}$$ è continua!

dim che $h \circ g$ è continua se h e g lo sono.

TESI: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |h(g(x))-h(g(x_0))|<\varepsilon$

IPOTESI:
$$\begin{cases} \forall \alpha>0\ \exists \delta>0\ \forall x : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\alpha \\ \forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0\ \forall y : |y-y_0|<\alpha \Rightarrow |h(y)-h(y_0)|<\varepsilon \end{cases}$$

$y=f(x)$
$y_0=f(x_0)$



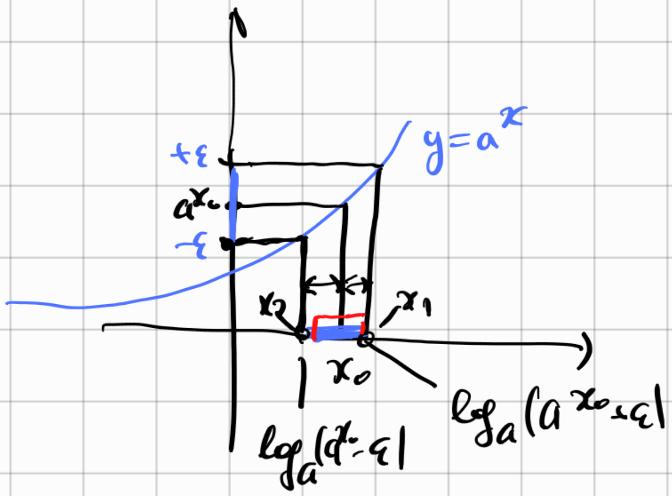
$\square$

Le funzioni elementari: x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ sono continue.

ES $f(x)=a^x$ $(a>1)$ $\quad (\mathbb{R},+) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (\mathbb{R}^+,\cdot)$

è continua in x_0:

$$|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$a^{x_0}-\varepsilon<a^x<a^{x_0}+\varepsilon$$
$$x_2=\log_a(a^{x_0}-\varepsilon)<x<\log_a(a^{x_0}+\varepsilon)=x_1$$
$$\Uparrow ?$$
$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$



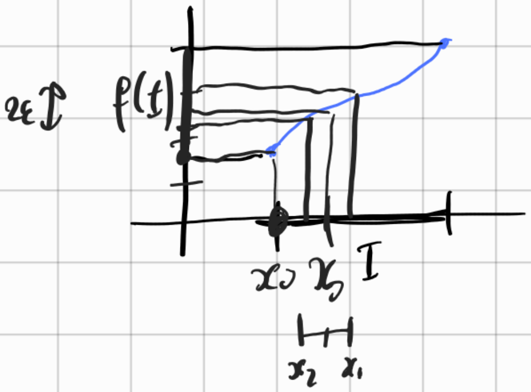
$$\delta=\min\{x_1-x_0,\ x_0-x_2\}.$$

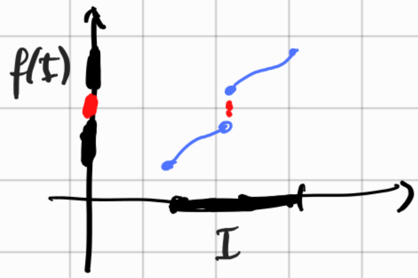
Teorema Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un ~~intervallo~~, (NON SERVE)

$$f: I \to \mathbb{R} \quad \text{monotona}$$

Se $f(I)$ è un intervallo allora f è continua.

(I è un intervallo se $a, b \in I$ e $a < x < b \Rightarrow x \in I$).





dim si fa come nell'esempio. □

[Oss se $x_0 = \min I$ basta verificare

$$x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \quad]$$

$$x_2 \leq x \leq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) \qquad \square$$

f monotona.

a^x, x^α sono monotone e invertibili
$(a>0)$ $(x \geq 0)$
$\Rightarrow$ sono continue.

Teo $\sin x$, $\cos x$ sono continue.

dim $\sin x$ è monotona su un intervallo

$$I = \left[-\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{4}\right] \qquad \tau = \text{periodo} \ (2\pi)$$

$\varphi(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$ è continua su $[0, \frac{\tau}{4}]$

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi(x)\cdot\varphi(\alpha)$$

$\Rightarrow$ φ è continua su $[\alpha, \alpha+\frac{\tau}{4}]$

$\Rightarrow$ φ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ sin, cos sono continue. $\square$