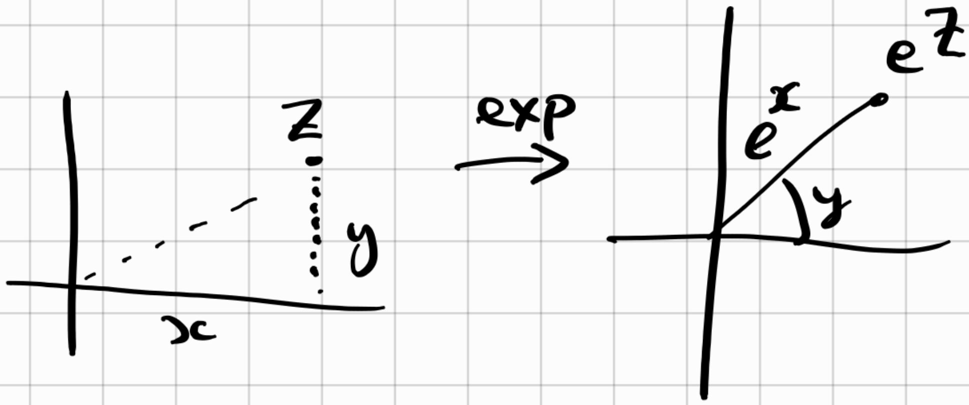
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 16 - 25.10.2023



Esercizio di riscaldamento

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$$

dimostrare che $\lim a_n = +\infty$

↑ successione definita per ricorrenza

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	2	3	5	9	17	33	...

① $\boxed{a_{n+1} \geq a_n + 1} \Rightarrow$ ② $a_n > n$

$\downarrow$

$+\infty$

$2a_n - 1 \geq a_n + 1$

$\underbrace{a_n \geq 2}$

↑ per induzione

(i) $a_0 = 2 \geq 2$

(ii) $a_{n+1} = 2a_n - 1$
$\geq 2 \cdot 2 - 1$
$= 3 \geq 2.$

OSS $\quad a_n \in \mathbb{Z} \quad a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n \to +\infty$

Esercizio ④

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n \end{cases}$$

dimostrare che $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Esercizio ⌂*

$$\begin{cases} a_0 = 10 \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases}$$

Trovare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} a_n$

SUCCESSIONI

$\{A \to B\} = B^A$

$\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\quad \underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\underline{a}(k) = a_k$

$\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

$\underline{x} \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

$x_k = \underline{x}(k)$

($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è uno spazio vettoriale reale.)

$\lim_{n\to+\infty} a_n$ è definito come per tutte le funzioni $A \to \mathbb{R}$.

Carattere:
- regolare: $\lim a_n$ esiste
- indeterminata: $\lim a_n$ non esiste

regolare:
- convergente $\lim a_n \in \mathbb{R}$ (è finito)
- divergente $\lim a_n \in \{+\infty, -\infty\}$ (è infinito).

ES $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è regolare.

---

limitata $\quad a_n$ è limitata se $\exists M : -M \le a_n \le M \;\; \forall n$

$\exists M : \forall n : |a_n| < M$

limitata $\Rightarrow$ non divergente

limitata & regolare $\Rightarrow$ convergente

ES $(-n)^n$ è indeterminata e illimitata

ES $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non ha limite
(indeterminata).

Teorema convergente $\Rightarrow$ limitata.

$\Updownarrow$

illimitata $\Rightarrow$ non convergente

SUCCESSIONI MONOTONE

es: crescente

$n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$

come le funzioni.

basta verificare che $\forall n: a_{n+1} \geq a_n$

$\Downarrow$ per induzione

$a_{n+k} \geq a_n$

Teor a_n monotona $\Rightarrow$ a_n regolare	già visto

Permanenza del segno.

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0 \Rightarrow$ in un intorno di x_0 $f > 0$.
- se $f(x) > 0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \ell \geq 0$

CRITERIO del RAPPORTO

Teor se $a_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ esiste $\ell \in [0, +\infty]$

Allora $\begin{cases} \text{se } \ell < 1 & a_n \to 0 \\ \text{se } \ell > 1 & a_n \to +\infty. \end{cases}$

dim già vista. $\ell < 1 \Rightarrow a_n < q^n$ $q < 1$
per n grande

$\ell > 1 \Rightarrow a_n > q^n$ $q > 1$. $\square$

CRITERIO della RADICE

Teor. $a_n \geq 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, $\ell \in [0,+\infty]$

Allora $\begin{cases} \text{se } \ell < 1 & a_n \to 0 \\ \text{se } \ell > 1 & a_n \to +\infty. \end{cases}$

dim

$$a_n = \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n = e^{n \ln \sqrt[n]{a_n}} \begin{cases} \nearrow e^{+\infty} = +\infty & \ell > 1 \\ \searrow e^{-\infty} = 0 & \ell < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \to \ell \qquad \ln \sqrt[n]{a_n} \to \ln \ell \begin{cases} > 0 & \ell > 1 \\ < 0 & \ell < 1 \end{cases}$$

Esercizio ④ $\quad a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{\dfrac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n\,\cancel{(n+1)}}}{\dfrac{\cancel{n!}}{n^n}} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

per il criterio del rapporto $\quad a_n \to 0.$

Esercizio ⑤ $\quad \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2n)^n}$

ORDINI di INFINITO

def $a_n \ll b_n$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$a_n \gg b_n$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

$(b_n \ll a_n)$.

$a_n \sim b_n$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

ES $n^2 \ll n^3$ $\qquad \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$ (per $n \to +\infty$)

$n^2+n \sim n^2$ $\qquad \frac{n^2+n}{n^2} = 1+\frac{1}{n} \to 1$

$2^n \gg n^2$ sarà vero? non basta $2^n \geq n^2$

basterebbe $\underbrace{2^n \geq n^3} \gg n^2 \Rightarrow 2^n \gg n^2$

Teorema [ordini di infinito] $\alpha > 0$, $a > 1$

$n \in \mathbb{N}$

$n^\alpha \overset{①}{\ll} a^n \overset{②}{\ll} n! \overset{③}{\ll} n^n$ per $n \to +\infty$

↑ esercizio ⊛

$x \in \mathbb{R}$

$\log_a x \ll x^\alpha \overset{④}{\ll} a^x$ per $x \to +\infty$

dim ① $n^\alpha \overset{?}{\ll} a^n$?

$\frac{n^\alpha}{a^n} \longrightarrow \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$

$\frac{n^\alpha}{a^n} \to 0$

② $a^n \overset{?}{\ll} n!$ $\qquad \frac{a^n}{n!} \to 0$ $\qquad \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$

(3) già visto come esercizio $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

(4) $x^\alpha \overset{?}{\ll} a^x$ $\Big/$ $0 \le \frac{x^\alpha}{a^x} \le \frac{\lceil x \rceil^\alpha}{a^{\lfloor x \rfloor}} \le \frac{(n+1)^\alpha}{a^n} \sim \frac{n^\alpha}{a^n} \xrightarrow{(1)} 0$

$n = \lfloor x \rfloor$

$(n+1)^\alpha \sim n^\alpha$ $\quad \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1+\cancel{\tfrac{1}{n}}\right)^\alpha \to 1^\alpha = 1$

(5) $\log_a x \ll x^\alpha$ $\quad \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{y}{a^{\alpha y}} = \frac{y}{(a^\alpha)^y} \xrightarrow{(4)} 0$

$y = \log_a x$ — $x = a^y$

$x \to +\infty$
$y \to +\infty$

$\square$

Esercizio Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^4 + 3^n - 3\ln n}{n! - 3\sqrt{n}}$$

$$\frac{2n^4 + 3^n - 3\ln n}{n! - 3\sqrt{n}} = \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{\left(\frac{2n^4}{3^n} + 1 - \frac{3\ln n}{3^n}\right)}{\left(1 - 3\frac{\sqrt{n}}{n!}\right)} \to 0 \cdot \frac{2 \cdot 0 + 1 - 0}{1 - 3 \cdot 0} = 0$$

$\underset{(x \to +\infty)}{x^x} = e^{x \ln x}$ $\Big/$ $\frac{x^x}{2^x} = \frac{e^{x \ln x}}{e^{x \ln 2}} = e^{x(\ln x - \ln 2)} \to +\infty$

ES 🏠 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)^x}{x^{2x}}$$

ES $2^n << 3^n$ $\qquad \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

ES $\sqrt{n} >> \sqrt[3]{n}$ $\qquad \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{1/3}} = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{6}} \to +\infty$

ES 🏠 $\log_2 x \overset{?}{<<} \log_3 x$ $\qquad \boxed{\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}}$

PUNTI LIMITE / SUCCESSIONI ESTRATTE

ES $a_n = (-1)^n$ è indeterminata

$$\underline{a} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$$

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1$ $\qquad b_n = a_{2n} \to 1$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = 1^n \cdot (-1) = -1$, $c_n = a_{2n+1} \to -1$

$\Downarrow$

a_n non ha limite.

Def (sottosuccessione o successione estratta)

Se $n_k \in \mathbb{N}$ è strettamente crescente $(\Rightarrow n_k \to +\infty)$

diciamo che $b_k = a_{n_k}$ è una sottosuccessione (o estratta) di a_n.

Teo Se $a_n \to \ell$ e a_{n_k} è una estratta

allora $a_{n_k} \to \ell$.

Esercizio (test settimanale) $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \quad \left(= \{\sqrt{n}\} \right)$

Trovare una estratta convergente

$$\frac{e^z - 1}{z} \to 1 \qquad \boxed{\frac{e^z - 1}{z} - 1} \to 0$$

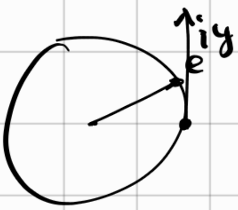
$$\frac{e^z - 1 - z}{z} = \frac{e^{x+iy} - 1 - x - iy}{x+iy}$$

$$= \frac{e^x e^{iy} - 1 - x - iy \cdot (x - iy)}{x^2+y^2} \quad \ldots$$

$$\frac{e^x - 1 - x}{x} \to 0$$

$$\frac{\sin y - y}{y} \to 0$$

$$\frac{\cos y - 1}{y} \to 0$$



$$\frac{e^{iy}}{y} \to i$$

$$\boxed{\frac{e^{iy} - iy}{y}} \to 0$$

$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$

$\wr$

Teorema $\forall n \quad a_{n+1} \geq a_n \implies \forall n, k > 0 \quad a_{n+k} \geq a_n$

$$\forall n \quad \boxed{\forall k > 0 \qquad a_{n+k} \geq a_n}$$

$\forall n : P(k)$

(i) $a_{n+1} \geq a_n$

(ii) $a_{n+k+1} \geq a_{n+k}$

$$a_{n+1} \geq a_n$$

ES $a_n = \left(\dfrac{1}{2+\frac{1}{n}} \right)^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$$

$a_n \to 0$