Studio qualitativo

Emanuele Paolini

2 luglio 2002

Non sempre è possibile determinare esplicitamente le soluzione di una equazione differenziale. Ci proponiamo quindi di trovare dei metodi per determinare alcune proprietà fondamentali della soluzione, senza doverla trovare esplicitamente.

1 Posizione del problema

Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ e sia data $f : \Omega \to \mathbf{R}$ (Ω è dunque il dominio di f). Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Consideriamo dunque il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

e l'equazione differenziale ad esso associata

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{2}$$

Diremo che una funzione $y : I \to \mathbf{R}$ definita su un intervallo $I \subset \mathbf{R}$ è una *soluzione dell'equazione differenziale* (2) se

1. l'intervallo I contiene più di un punto (altrimenti il problema risulta banale);
2. y è derivabile (in quanto nell'equazione differenziale compaiono le derivate);
3. per ogni $x \in I$ si ha $(x, y(x)) \in \Omega$ (altrimenti non posso calcolare f);
4. $y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale (2).

Diremo che una soluzione y di (2) definita su un intervallo I *può essere estesa* ad un intervallo J contenente strettamente I se su J esiste una soluzione z di (2) che coincide su I con y.

Diremo quindi che una soluzione y dell'equazione differenziale (2) definita su un intervallo I è *massimale* se non può essere in nessun modo estesa.

Nel caso in cui $x_0 \in I$ e $y(x)$ è una soluzione di (2) tale che $y(x_0) = y_0$ diremo che $y(x)$ è una *soluzione del problema di Cauchy* (1).

Data una soluzione di (2) definita su un intervallo I, se tale soluzione non è massimale posso estenderla ad un intervallo più grande J. Iterando il procedimento si trovano soluzioni definite su intervalli sempre più grandi finchè non si trova una soluzione che non può essere ulteriormente estesa. (una dimostrazioen precisa di questo fatto, se non sappiamo a priori l'unicità della soluzione, richiede il *lemma di Zorn*).

Teorema 1.1 *Se esiste una soluzione di (2) allora esiste una soluzione massimale.*

2 Esistenza e unicità delle soluzioni

Una prima proprietà fondamentale per poter poi proseguire nello studio delle soluzioni è determinare se la soluzione esiste e, nel caso, se è unica.

Teorema 2.1 (Peano) *Se f è continua in un intorno del punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora esiste una soluzione (locale) di (1).*

Notiamo che se f è continua allora $y'(x) = f(x, y(x))$ è anch'essa continua e dunque le soluzioni $y(x)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^1$.

Nei punti in cui f non è continua non abbiamo gli strumenti per dire alcunché. Supporremo quindi nel seguito che f sia continua su tutto Ω.

Teorema 2.2 (Cauchy) *Se f é continua ed è lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto ad x in un intorno di $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora il problema di Cauchy (1) ha una unica soluzione massimale.*

Nel caso in cui la funzione f sia di classe $\mathcal{C}^1$ il teorema precedente è verificato e quindi è garantita l'esistenza e l'unicità delle soluzioni.

Di particolare rilevanza è il seguente corollario.

Teorema 2.3 *Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due diverse funzioni definite su uno stesso intervallo I ed entrambi soluzioni dell'equazione differenziale (2). Supponiamo inoltre che f sia continua e localmente lipschitziana rispetto ad y uniformemente rispetto ad x (ad esempio $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$). Allora y_1 e y_2 non si toccano mai, cioè per ogni $x \in I$ si ha $y_1(x) \neq y_2(x)$.*

Dimostrazione:
Sia $J = \{x \in I : y_1(x) = y_2(x)\}$. Siccome y_1 e y_2 sono funzioni continue J risulta essere un sottoinsieme chiuso di I. D'altra parte preso un punto $x_0 \in J$, e scelto $y_0 = y_1(x_0) = y_2(x_0)$ per il Teorema 2.2 esiste un intorno di x_0 su cui il problema (1) ha una unica soluzione. Siccome y_0 e y_1 sono soluzioni se ne ricava che in tale intorno y_0 e y_1 coincidono. Dunque tutto un intorno di x_0 sta in J. Ne consegue che J è anche aperto. Dunque essendo I connesso e sapendo che $J \neq I$ (in quanto y_1 e y_2 per ipotesi sono diverse) se ne deduce che $J = \emptyset$. $\square$

È importante notare che nel caso ci sia l'esistenza locale di soluzioni (f continua), ogni soluzione può essere estesa fino a "raggiungere" il bordo di Ω. Questo è precisato nel seguente teorema che può essere espresso in questo modo: se c'è esistenza locale delle soluzioni allora la soluzione massimale esce da ogni compatto assegnato.

Teorema 2.4 *Sia $K \subset \Omega$ un compatto e sia f continua su tutto Ω. Sia $y : I \to \mathbf{R}$ una soluzione massimale di (1) con dato iniziale $(x_0, y_0) \in K$. Allora esistono $x_1 \geq x_0$ e $x_2 < x_0$, $x_1, x_2 \in I$ tali che $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)) \in \partial K$.*

Dimostrazione:
Sia $J = \{x \in I : x \geq x_0\}$. Posto $x_1 = \sup J$ si hanno due possibilità: o $J = [x_0, x_1]$ oppure $J = [x_0, x_1[$. Supponiamo per assurdo che per ogni $x \in J$ il punto $(x, y(x))$ sia interno a K.

Se $J = [x_0, x_1]$ allora, essendo $(x_1, y(x_1))$ un punto interno a K ed essendo f continua in un intorno di $(x_1, y(x_1))$, il teorema di esistenza locale ci permette di concludere che la soluzione y può essere estesa ad un intorno di x_1. Questo è assurdo perché l'intervallo I era supposto essere massimale.

Supponiamo invece che $J = [x_0, x_1[$. Sicuramente $x_1 < \infty$ altrimenti K non sarebbe limitato. Vogliamo dimostrare che esiste il limite $\lim\limits_{x \to x_1^-} y(x)$. Siano $M =$

$\limsup_{x \to x_1^-} y(x)$ e $m = \liminf_{x \to x_1^-} y(x)$ e supponiamo per assurdo che $M > m$. Essendo $y(x)$ continua in J essa assume frequentemente (per $x \to x_1$) tutti i valori compresi tra m e M. In particolare preso comunque $\varepsilon > 0$ è possibile trovare due punti x' e x'' con $|x' - x''| < \varepsilon$ tali che $|y(x') - y(x'')| > (M - m)/2$. Per il teorema di Lagrange siamo quindi in grado di trovare una successione $\xi_k \to x_1$ tale che $|y'(\xi_k)| > (M - m)/(2\varepsilon)$. Siccome y è soluzione di (2) si ha dunque $|f(\xi_k, y(\xi_k))| \to \infty$ il che è assurdo in quanto la successione di punti $(\xi_k, y(\xi_k))$ è interamente contenuta nel compatto K ed essendo continua f è limitata su K. Dunque deve essere $M = m$ cioè $m = \lim_{x \to x_1^-} y(x)$. Essendo K chiuso si ha $(x_1, m) \in K$. Estendiamo quindi y sull'intervallo chiuso $[x_0, x_1]$ ponendo $y(x_1) = m$. La funzione risultante risulta essere continua. Inoltre per Lagrange si ha $(y(x_1) - y(x_1 - h))/h = y'(\xi_h) = f(\xi_h, y(\xi_h)) \to f(x_1, m)$ e dunque y è derivabile (derivata sinistra) nel punto x_1 e vale $y'(x_1) = f(x_1, y(x_1))$. Dunque effettivamente abbiamo costruito una estensione della soluzione, e questo contraddice l'ipotesi che y fosse una soluzione massimale. $\square$

Esempi.

1. Sia $\Omega = \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = 0$ se $x \neq 0$, $f(x, y) = 1$ se $x = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 17$. Allora il problema di Cauchy (1) non ha alcuna soluzione. Infatti una eventuale soluzione $y(x)$ dovrebbe essere costante per $x > 0$ e anche per $x < 0$. Essendo derivabile $y(x)$ dovrebbe essere continua e quindi necessariamente dovrebbe essere costante su tutto l'intervallo I di definizione. Ma allora si avrebbe $y'(0) = 0 \neq f(0, y(0)) = 1$.

2. Sia $f(x, y) = 0$ se $x < 0$, $f(x, y) = 1$ se $x \geq 0$. Allora la funzione $y(x) = 17 + x$ è una soluzione massimale di (2) sull'intervallo $I = [0, \infty[$. Supponiamo infatti che esista una soluzione $z(x)$ definita su un intervallo $J = [-\varepsilon, \infty[$ e coincidente con y su I. Allora per $x < 0$ l'estensione z è costante (in quanto $z' = 0$) ed essendo z una funzione continua dovrà essere $z = 17$ per $x < 0$. Dunque z non è derivabile in 0 e non è quindi una soluzione di (2).

3. Si consideri la funzione $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ e poniamo $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Si verifica allora facilmente che la funzione $y(x) = 0$ è soluzione di (1). D'altra parte anche la funzione definita su tutto $\mathbf{R}$: $y(x) = x^2$ per $x \geq 0$ e $y(x) = -x^2$ per $x < 0$ è soluzione di (1). Dunque in questo caso la soluzione non è unica, e infatti la funzione f pur essendo continua non risulta essere lipschitziana rispetto y in nessun intorno del punto y_0.

4. Dimostrare che il seguente problema di Cauchy

   $$\begin{cases} y'(x) = (y^2(x) - 1) x \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   ammette una soluzione unica $y(x)$ definita globalmente su tutto $\mathbf{R}$.

   In questo caso si ha $f(x, y) = (y^2 - 1) x \sin x$, che è una funzione $\mathcal{C}^1$ su tutto $\Omega = \mathbf{R}^2$. Vale dunque il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni. Notiamo inoltre che $y_0(x) = -1$ e $y_1(x) = 1$ sono soluzioni dell'equazione differenziale (2). Consideriamo ora il compatto $K_M = [-M, M] \times [-1, 1]$. Per Teorema 2.4 la soluzione massimale $y(x)$ del problema di Cauchy preso in considerazione deve uscire da ogni compatto K_M. La soluzione $y(x)$ però, per il Teorema 2.3 non può toccare le due altre soluzioni $y_0(x)$ e $y_1(x)$. Dunque necessariamente deve toccare ∂K nei due segmenti verticali $x = M$ e $x = -M$. Questo implica che $M, -M \in I$. Siccome questo è vero per ogni $M > 0$ otteniamo che $I = \mathbf{R}$.

3 Monotonia e punti critici delle soluzioni

Dopo aver determinato le zone di Ω su cui vale il teorema di esistenza e unicità, è utile studiare il segno di f. Infatti le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale (2) saranno strettamente crescenti dove $f > 0$, strettamente decrescenti dove $f < 0$ e avranno un punto critico dove $f = 0$.

Di particolare rilevanza è l'insieme $\{f = 0\}$ che quando $f \in \mathcal{C}^1$ risulta essere, (nei punti in cui $\nabla f \neq 0$) il grafico di una funzione differenziabile.

Un primo caso notevole è il caso in cui f si annulla su una retta orizzontale $y = c$. In questo caso la funzione costante $y = c$ è una soluzione dell'equazione differenziale (2). In particolare (nell'ipotesi $f \in \mathcal{C}^1$) tale costante non può essere attraversata dalle altre soluzioni dell'equazione differenziale.

È importante capire se le soluzioni dell'equazione differenziali attraversano o no la curva $\{f = 0\}$. Infatti questo ci permette di determinare il segno della derivata $y'(x)$ e quindi di ottenere importanti informazioni sull'andamento della soluzione $y(x)$ (monotonia, massimi e minimi relativi...).

Più in generale è interessante capire quando una soluzione di una equazione differenziale può attraversare una determinata curva.

Teorema 3.1 *Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione differenziale* (2) *definita su un intervallo I e sia $y_0(x)$ una funzione qualunque definita su I, di classe $\mathcal{C}^1$ e tale che il suo grafico sia interamente contenuto nel dominio Ω di definizione di f. Supponiamo che in un punto fissato x_0 interno ad I si abbia $y(x_0) < y_0(x_0)$ e supponiamo inoltre che per ogni $x \in I$ si abbia $y_0'(x) > f(x, y_0(x))$. Allora per ogni $x > x_0$ si ha $y(x) < y_0(x)$.*

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo che l'insieme $J = \{x \in I : x \geq x_0 \text{ e } y(x) = y_0(x)\}$ non sia vuoto. Tale insieme è chiuso ed inferiormente limitato, quindi se non è vuoto, ammette minimo. Sia $\bar{x}$ il minimo di J. Sicuramente $\bar{x} > x_0$ in quanto $y(\bar{x}) = y_0(\bar{x})$. Inoltre per ogni $x \in [x_0, \bar{x}[$ si ha $y(x) - y_0(x) < 0$ e quindi $y'(\bar{x}) \geq y_0'(\bar{x})$ (in quanto il rapporto incrementale sinistro di $y - y_0$ è sempre positivo).

Questo è assurdo in quanto per ipotesi si ha invece $y'(\bar{x}) = f(\bar{x}, y(\bar{x})) = f(\bar{x}, y_0(\bar{x})) < y_0'(\bar{x})$. $\square$

Se ad esempio $y_0(x)$ è una funzione il cui grafico è contenuto in $\{f = 0\}$ (cioè $f(x, y_0(x)) = 0$) allora una soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale può attraversare la curva $y_0(x)$ dall'alto verso il basso nei punti in cui $y_0'(x) > 0$ e dal basso verso l'alto nei punti in cui $y_0'(x) < 0$.

Esempi.

1. Mostrare che il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - xy^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   ammette una soluzione $y(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$.

   Posto $f(x, y) = xy^3$ abbiamo che f si annulla sul grafico della funzione $y_0(x) = 1/\sqrt[3]{x}$. Per $x > 0$ la soluzione è crescente quando si trova al di sotto della funzione y_0 ed è decrescente quando si trova al di sopra. Inoltre essendo $y_0' < 0$ le soluzioni possono attraversare la funzione $y_0(x)$ solo passando da sotto a sopra.

   Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cachy in questione, definita su un intervallo massimale I. Il dato iniziale è $(0, 0) \in \{f > 0\}$. Dunque la soluzione risulta essere strettamente crescente in un intorno di 0.

Vogliamo dimostrare innanzitutto che necessariamente la soluzione incontra entrambi i rami del grafico di $y_0(x)$. Sia infatti $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo da appartenere all'intervallo I di esistenza della soluzione e sia $\delta = y(\varepsilon)$. Consideriamo il compatto $K = \{(x, y) : \varepsilon/2 \leq x \leq 1/\delta^2,\ 0 \leq y \leq 1/sqrtx\}$. Il punto $(\varepsilon, y(\varepsilon))$ è interno al compatto K, e il Teorema 2.4 ci garantisce che la soluzione esce dal compatto per un qualche $x > \varepsilon$. La soluzione però non può toccare la retta $y = 0$ in quanto all'interno del compatto rimane sempre positiva e crescente. Non può neanche toccare il segmento verticale $x = 1/\delta^2$, $y \in [0, \delta]$ in quanto $y(\varepsilon) = \delta$ e per $x > 0$ la soluzione è strettamente crescente. Dunque necessariamente la soluzione deve incontrare il grafico della funzione $y_0(x) = 1/\sqrt{x}$ in un punto $\bar{x} > 0$.

Nel punto $x = \bar{x}$ la soluzione $y(x)$ attraversa la curva $y_0(x)$. Infatti in tale punto $y'(\bar{x}) = 0$ mentre $y_0'(\bar{x}) < 0$. Dunque in un intorno destro di $\bar{x}$ la soluzione si trova al di sopra della curva $y_0(x)$ e quindi risulta essere decrescente (in $\bar{x}$ la soluzione presenta un massimo relativo).

Il Teorema 3.1 ci garantisce inoltre che la soluzione non può più riattraversare il grafico della funzione y_0 in quanto $y_0' < 0$. Dunque la soluzione è decrescente e limitata. Applicando, al solito, il Teorema 2.4 si può quindi mostrare che la soluzione massimale è definita per ogni $x > 0$.

Un ragionamento analogo si fa per $x < 0$ ottenendo l'esistenza globale, su tutto $\mathbf{R}$ della soluzione.

2. Dimostriamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -x(y^3 - \sin x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione $y(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$.

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy e sia I l'intervallo massimale di definizione.

Mostriamo innanzitutto che $|y(x)| < 2$ per ogni $x \in I$. Infatti per $x > 0$ sulla curva $y_1(x) = 2$ si ha $f(x, 2) = -x(8 - \sin x) < -x < 0 = y_1'(x)$. Dunque per il Teorema 3.1 la soluzione per $x > 0$ non può mai attraversare la retta $y = 2$. Discorso analogo si fa per la retta $y = -2$ e anche per $x < 0$ mostrando che il grafico della soluzione non può mai toccare le rette $y = 2$ e $y = -2$ né per $x > 0$ né per $x < 0$ e che quindi y risulta limitata (in realtà si può essere più precisi e mostrare che $|y| \leq 1$).

A questo punto si applica, come al solito, il Teorema 2.4 ai compatti $K_M = [-M, M] \times [-2, 2]$ mostrando che la soluzione deve avere esistenza globale.

4 Confronto

Teorema 4.1 *Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo su cui sono definite due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$. Siano $x_0 < x_1$ due punti di I. Se $f(x_1) < g(x_1)$ e $f(x_2) > g(x_2)$ allora esiste un punto $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ e $f'(\bar{x}) \geq g'(\bar{x})$.*

Teorema 4.2 *Consideriamo due funzioni $y(x)$ e $z(x)$ soluzioni dei rispettivi problemi di Cauchy*

$$\{ y'(x) = f(x, y(x)) y(x_0) = y_0 \qquad \{ z'(x) = g(x, z(x)) z(x_0) = y_0$$

su un intervallo I che contiene il punto x_0. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un sottoinsieme degli insiemi di definizione di f e g tale che i grafici delle soluzioni $y(x)$ e $z(x)$ siano *contenuti in* Ω *al variare di* $x \in I$*. Supponiamo che per ogni* $(x, y) \in \Omega$ *si abbia* $f(x, y) < g(x, y)$*. Allora per ogni* $x \in I$*,* $x > x_0$ *si ha* $y(x) < z(x)$ *mentre per ogni* $x \in I$*,* $x < x_0$ *si ha* $y(x) > z(x)$*.*

Teorema 4.3 *Sia* $f\colon (x_0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^1$ *tale che il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$$

esiste, finito o infinito. Se $\ell \neq 0$ *allora* f *non può avere un asintoto orizzontale per* $x \to +\infty$*.*