Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
3/6/2019

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.
E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`
`Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):`
`sì` ☐ `no` ☐

Esercizio 1 (10 punti)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = e^{x^2} x^2 (x-1)^2 \,.$$

(i) Si dimostri che f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e si calcolino $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(ii) Si discuta il segno di f.
(iii) Si dimostri che f ammette almeno tre punti critici e si discuta la loro natura.
(iv) Si dimostri che f è decrescente in $(-\infty, 0]$ e crescente in $[1, +\infty)$.
(v) Si dimostri che f ammette esattamente tre punti critici.

Esercizio 2 (10 punti)**.** Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si studi il limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x - nx + e^x - \frac{5}{2}\, x^2 - \cos(2x)}{\operatorname{sen}\big(x^{(n^2)}\big)} \,.$$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Fissato un parametro $\gamma > 0$, si definisca la funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1+x^\gamma}\right).$$

(i) Si calcolino $\lim_{x\to0} f(x)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(ii) Si dica per quali $\gamma > 0$ la funzione f ammette un massimo globale.
(iii) Si dica, al variare del valore di γ, se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

converge, diverge a $+\infty$, diverge a $-\infty$, oppure oscilla.
(iv*) Si mostri che se $\gamma = 2$ c'è un unico massimo globale e non ci sono minimi o massimi locali.